ALGEBRA 1, Lista 6

Konwersatorium 22.11.2024, Ćwiczenia 22.11.2024.

0S. Materiał teoretyczny: Grupa ilorazowa, homomorfizm ilorazowy i zasadnicze twierdzenie o homomorfiźmie grup. Produkt grup: definicja, własności, przykłady. Twierdzenie o produkcie wewnętrznym podgrup grupy.

1S. Znaleźć $k \in \mathbb{N}_{>0}$ takie, że:
   (a) $\mathbb{Z}_{12}/3\mathbb{Z}_{12} \cong \mathbb{Z}_k$;
   (b) $\mathbb{Z}_8/6\mathbb{Z}_8 \cong \mathbb{Z}_k$;
   (c) $\mathbb{Z}_{12}/5\mathbb{Z}_{12} \cong \mathbb{Z}_k$.

2. Czy następujące grupy są cykliczne?
   (a)S $(\mathbb{Z}_3, +_3) \times (\mathbb{Z}_6, +_6)$;
   (b)S $(\mathbb{Z}_3, +_3) \times (\mathbb{Z}_4, +_4)$;
   (c)K $(\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}_2, +)$;
   (d)K $(\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}, +)$.

3K. Załóżmy, że $k, n \in \mathbb{N}_{>0}$ oraz $k|n$. Udowodnić, że:
   (a) istnieje jedyny homomorfizm $\varphi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_k$, taki że $\varphi(1) = 1$;
   (b) dla homomorfizmu φ z punktu (a) powyżej mamy:

$$\ker(\varphi) = \langle k \rangle = k\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{\frac{n}{k}};$$

   (c) $\mathbb{Z}_n/k\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_k$.

4. W grupie ilorazowej G/H wyznaczyć rząd elementu $a + H$, gdzie:
   (a) $G = (\mathbb{Q}, +),\ H = (\mathbb{Z}, +),\ a = \frac{2}{3}$;
   (b) $G = (\mathbb{Z}_{12}, +_{12}),\ H = \{0, 3, 6, 9\},\ a = 5$;
   (c) $G = (\mathbb{Q}, +),\ H = (3\mathbb{Z}, +),\ a = \frac{2}{3}$;
   (d) $G = (\mathbb{R}, +),\ H = (\mathbb{Q}, +),\ a = \sqrt{2}$.

5. Rozważamy grupy G, H oraz dzielnik normalny $K \lhd G$. W każdym z poniższych przypadków udowodnić, że $G/K \cong H$ (wskazać epimorfizm $f : G \to H$, taki że $\ker(f) = K$ i skorzystać z zasadniczego twierdzenia o homomorfiźmie grup).
   (a) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot),\ K = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\},\ H = (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$.
   (b) $G = (\mathbb{R}^2, +),\ K = \mathrm{Lin}\{(1, 2)\},\ H = (\mathbb{R}, +)$.
   (c) $G = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot),\ K = \{1, -1, i, -i\},\ H = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.
   (d) $G = (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot),\ K = \{1, -1\},\ H = (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$.
   (e) $G = (\mathbb{Z}, +) \times (\mathbb{Z}, +),\ K = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{Z}\},\ H = (\mathbb{Z}, +)$.

6. Mamy funkcję

$$f : (\mathbb{R}^2, +) \to (\mathbb{R}, +), \quad f(x, y) = 4x - 2y;$$

   która jest epimorfizmem grup (a nawet przestrzeni liniowych).
   (a) Znaleźć $\ker(f)$.
   (b) Wskazać podgrupę $H < (\mathbb{R}^2, +)$, taką że $(\mathbb{R}^2, +)$ jest produktem wewnętrznym podgrup $\ker(f)$ i H (w szczególności: $(\mathbb{R}^2, +) \cong \ker(f) \times H$).

7. Czy istnieje $H < (\mathbb{Q}, +)$, taka że $(\mathbb{Q}, +)$ jest produktem wewnętrznym podgrup $\mathbb{Z}$ i H?

8. Czy grupa S_3 jest izomorficzna z produktem $G \times H$ dla pewnych nietrywialnych grup G i H?