

## ALGEBRA 1, Lista 5

Ćwiczenia 20.11.2024, Konwersatorium 20.11.2024.

- 0S. Materiał teoretyczny: Homomorfizmy, epimorfizmy, monomorfizmy, endomorfizmy i automorfizmy grup: definicje i przykłady. Twierdzenie Cayley'a. Własności homomorfizmów grup. Jądro i obraz homomorfizmu grup. Dzielnik normalny.
- 1S. Udowodnić, że złożenie homomorfizmów jest homomorfizmem.
- 2S. Udowodnić, że funkcja odwrotna do izomorfizmu jest izomorfizmem.
- 3S. Niech  $G$  będzie grupą. Udowodnić, że  $\text{Aut}(G) \leq S_G$ .
- 4K. Załóżmy, że  $G, H$  są grupami oraz grupa  $G$  jest cykliczna, skończona i generowana przez element  $a$ . Załóżmy, że  $b \in H$  oraz  $\text{ord}(b)$  jest skończony i dzieli  $\text{ord}(a)$ . Udowodnić, że:
- istnieje dokładnie jeden homomorfizm grup  $f : G \rightarrow H$  taki, że  $f(a) = b$ ;
  - każdy endomorfizm  $\mathbb{Z}_n$  jest postaci:

$$\varphi_k : \mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_n, \quad \varphi_k(x) = k \cdot_n x;$$

dla pewnego  $k \in \mathbb{Z}_n$ .

- 5K. Załóżmy, że  $G$  jest grupą cykliczną, nieskończoną i generowaną przez element  $a$ ,  $H$  jest dowolną grupą oraz  $b \in H$ . Udowodnić, że:
- istnieje dokładnie jeden homomorfizm grup  $f : G \rightarrow H$  taki, że  $f(a) = b$ ;
  - każdy endomorfizm  $\mathbb{Z}$  jest postaci:

$$\psi_k : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad \psi_k(x) = kx;$$

dla pewnego  $k \in \mathbb{Z}$ .

- 6K. Niech  $(A, +)$  będzie grupą przemienną i  $k \in \mathbb{N}_{>0}$ . Definiujemy:

$$kA := \{kx \mid x \in A\}$$

( $x$  dodajemy do siebie  $k$  razy). Udowodnić, że  $kA$  jest dzielnikiem normalnym  $A$ .

7. Czy istnieją poniższe homomorfizmy grup  $f : G \rightarrow H$ ? Jeśli istnieją, to wyznaczyć obraz i jądro danego homomorfizmu.
- $G = (\mathbb{Z}_4, +_4)$ ,  $H = (\mathbb{Z}, +)$ ,  $f(1) = 1$ .
  - $G = (\mathbb{Z}_4, +_4)$ ,  $H = (\mathbb{Z}_2, +_2)$ ,  $f(1) = 1$ .
  - $G = H = (\mathbb{R}, +)$ ,  $f(1) = 99$ .
  - $G = (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$ ,  $H = (\mathbb{R}, +)$ ,  $f(8) = 3$ .
  - $G = (\mathbb{Q}, +)$ ,  $H = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ ,  $f(1) = 2$ .
  - $G = (\mathbb{Z}_4, +_4)$ ,  $H = (\mathbb{Z}_5, +_5)$ ,  $f(1) = 1$ .
8. Wyznaczyć wszystkie homomorfizmy  $f : G \rightarrow H$ , gdzie:
- $G = (\mathbb{Z}, +)$ ,  $H = (\mathbb{Z}_4, +_4)$ ;
  - $G = (\mathbb{Z}_3, +_3)$ ,  $H = (\mathbb{Z}_4, +_4)$ ;
  - $G = (\mathbb{Z}_{10}, +_{10})$ ,  $H = (\mathbb{Z}_6, +_6)$ ;
  - $G = H = (\mathbb{Q}, +)$ .
9. Czy następująca podgrupa  $H$  grupy  $G$  jest dzielnikiem normalnym?
- $G = D_4$ ,  $H = \{\text{id}, O_{\pi/2}, O_{\pi}, O_{3\pi/2}\}$ .
  - $G = D_4$ ,  $H = \{\text{id}, O_{\pi}\}$ .
  - $G = S_4$ ,  $H = \{\text{id}, (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$ .
10. Niech

$$H := \{\text{id}, (1, 2)(3, 4), (1, 3)(2, 4), (1, 4)(2, 3)\} \subset S_4.$$

Udowodnić, że:

- $H$  jest podgrupą  $S_4$ ;
- $H$  jest dzielnikiem normalnym w  $S_4$  (wskazówka: dla  $\sigma \in S_4$  opisać  $\sigma(1, 2)(3, 4)\sigma^{-1}$  i następnie skorzystać z odpowiedniego kryterium na dzielnik normalny z wykładu).