ALGEBRA 1, Lista 13

Konwersatorium 31.01.2025, Ćwiczenia 31.01.2025.

0S. Materiał teoretyczny: Chińskie twierdzenie o resztach. Ideał w pierścieniu R. Ideał główny. Pierścień euklidesowy jest dziedziną ideałów głównych. Pierścień ilorazowy. Jądro i obraz homomorfizmu pierścieni przemiennych z jedynką oraz zasadnicze twierdzenie o homomorfiźmie pierścieni. Opis pierścienia ilorazowego $K[X]/(W)$ (K jest ciałem), postać normalna elementów tego pierścienia oraz implikacja: jeśli W jest nierozkładalny, to pierścień $K[X]/(W)$ jest ciałem. Ideały maksymalne oraz związek pomiędzy ideałami maksymalnymi i ciałami. Charakterystyka ciała i podciało. Równania algebraiczne w ciele F, znajdowanie rozwiązań w rozszerzeniu K ciała F. Ciało algebraicznie domknięte: definicja, istnienie (informacyjnie) i nieskończoność. Ciała proste. Podciało proste ciała F. Liczba elementów ciała skończonego.

1S. W następujących pierścieniach ilorazowych sporządzić tabelki dodawania i mnożenia. Znaleźć wszystkie dzielniki zera w tych pierścieniach.
(a) $\mathbb{Z}_6/(3)$.
(b) $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)/((1,2))$.

2K. Które z podanych pierścieni są ciałami?
(a) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.
(b) $\mathbb{Z}_4$.
(c) $\mathbb{Z}_{17}$.
(d) $\mathbb{Q}[X]/(X^3 - 3)$.
(e) $\mathbb{Q}[X]/(X^2 + 1)$.
(f) $\mathbb{Z}_5[X]/(X^2 + 1)$.
(g) $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 7)$.
(h) $M_n(\mathbb{R}),\ n > 1$.

3K. Załóżmy, że F jest ciałem oraz $I \trianglelefteq F$. Udowodnić, że $I = \{0\}$ lub $I = F$.

4K. Załóżmy, że $f : F_1 \to F_2$ jest homomorfizmem ciał. Udowodnić, że f jest monomorfizmem.

5K. Załóżmy, że R niezerowym pierścieniem przemiennym z 1 oraz ideał $I \triangleleft R$ jest taki, że $I \neq R$. Mówimy, że ideał I jest *pierwszy*, gdy dla wszystkich $a, b \in R$, $a \cdot b \in I$ pociąga, że $a \in I$ lub $b \in I$. Udowodnić, że:
(a) ideał I jest pierwszy wtedy i tylko wtedy, gdy pierścień R/I jest dziedziną;
(b) jeśli I jest maksymalny, to I jest pierwszy.

6. Obliczyć sumę i iloczyn danych elementów w podanych pierścieniach ilorazowych i podać wyniki w postaci normalnej. Które z tych pierścieni ilorazowych są ciałami?
(a) $3X + 4 + I$ i $5X - 2 + I$ w $\mathbb{R}[X]/(X^2 - 7)$.
(b) $X^2 + 3X + 1 + I$ i $-2X^2 + 4 + I$ w $\mathbb{Q}[X]/(X^3 + 2)$.
(c) $X^2 + 1 + I$ i $X + 1 + I$ w $\mathbb{Z}_2[X]/(X^3 + X + 1)$.

7. Udowodnić istnienie poniższych izomorfizmów. Wskazówka: w każdym przypadku znaleźć epimorfizm pierścieni, którego jądrem jest odpowiedni ideał i zastosować zasadnicze twierdzenie o homomorfizmie pierścieni.
(a) $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 5) \cong \mathbb{C}$.
(b) $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - 7) \cong \mathbb{Q}[\sqrt{7}] = \{a + b\sqrt{7} : a, b \in \mathbb{Q}\}$.
(c) $\mathbb{Z}_{14}/(2) \cong \mathbb{Z}_2$.
(d) $R[X]/(X - r) \cong R$, gdzie R jest pierścieniem przemiennym z jedynką i $r \in R$.
(e) $\mathbb{R}[X, Y]/(X + Y) \cong \mathbb{R}[Y]$.

8. Wyznacznik $\begin{vmatrix} 676 & 117 & 522 \\ 375 & 65 & 290 \\ 825 & 143 & 639 \end{vmatrix}$ jest dodatni i mniejszy od 100. Obliczyć ten wyznacznik za pomocą chińskiego twierdzenia o resztach.
Wskazówka: obliczyć wartość wyznacznika modulo 10 *i modulo* 11.
9. Wskazać generatory następujących ideałów w danych pierścieniach euklidesowych:
   (a) $(2) \cap (3)$ w $\mathbb{Z}$;
   (b) $(12) \cap (18)$ w $\mathbb{Z}$;
   (c) $(X^2 - 1) \cap (X + 1)$ w $\mathbb{Q}[X]$.
   Zauważyć ogólną prawidłowość.
10. Wskazać generatory następujących ideałów w danych pierścieniach euklidesowych:
   (a) $(2, 3)$ w $\mathbb{Z}$;
   (b) $(9, 12)$ w $\mathbb{Z}$;
   (c) $(X^2 + X + 1, X^2 + 1)$ w $\mathbb{Z}_2[X]$.
   Zauważyć ogólną prawidłowość.