ALGEBRA 1, Lista 12

Konwersatorium 24.01.2025 i Ćwiczenia 24.01.2025.

0S. Podstawowe twierdzenie arytmetyki. Element nierozkładalny w pierścieniu. Twierdzenie o jednoznacznym rozkładzie w pierścieniu euklidesowym. Zasadnicze twierdzenie algebry liczb zespolonych. Twierdzenie o pierwiastkach zespolonych wielomianu rzeczywistego. Opis elementów nierozkładalnych pierścienia $\mathbb{C}[X]$ oraz pierścienia $\mathbb{R}[X]$. Twierdzenie o pierwiastkach wymiernych wielomianu. Lemat Gaussa i Kryterium Eisensteina.

1S. Załóżmy, że R jest dziedziną oraz $a, b \in R \setminus \{0\}$. Udowodnić, że jeśli $a|b$, to istnieje jedyne $q \in R$ takie, że $aq = b$. Wtedy q nazywamy *ilorazem* b przez a i oznaczamy $\frac{b}{a}$ (podobnie jak oznaczamy ułamek).

2S. Udowodnić, że następujące liczby rzeczywiste są niewymierne, odwołując się do twierdzenia o pierwiastkach wymiernych wielomianu: $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{25}$, $\sqrt[5]{\frac{2}{3}}$.

3K. Czy dane wielomiany są nierozkładalne w podanym pierścieniu?
- (a) $X^3 + X^2 + X + 1$ w $\mathbb{Q}[X]$.
- (b) $3X^8 - 4X^6 + 8X^5 - 10X + 6$ w $\mathbb{Q}[X]$.
- (c) $X^4 + X^2 - 6$ w $\mathbb{Q}[X]$.
- (d) $4X^3 + 3X^2 + X + 1$ w $\mathbb{Z}_5[X]$.
- (e) $X^5 + 15$ w $\mathbb{Q}[X]$.
- (f) $X^4 - 2X^3 + X^2 + 1$ w $\mathbb{R}[X]$.

4K. (a) Załóżmy, że wielomiany $W, V \in \mathbb{R}[X] \setminus \{0\}$ są *względnie pierwsze*, tzn. 1 jest największym wspólnym dzielnikiem W i V. Udowodnić, że istnieją wielomiany $S, T \in \mathbb{R}[X]$ takie, że w ciele $\mathbb{R}(X)$ mamy:

$$\frac{1}{WV} = \frac{S}{W} + \frac{T}{V}.$$

(b) Udowodnić, że każdą funkcję wymierną $T \in \mathbb{R}(X)$ można przedstawić jako sumę ułamków postaci $\frac{V}{W}$, gdzie $V, W \in \mathbb{R}[X]$ oraz W jest potęgą nierozkładalnego wielomianu stopnia $\leqslant 2$ (uwaga: dzięki temu umiemy całkować funkcje wymierne!).

5. Wskazać nierozkładalny wielomian:
- (a) stopnia 2 należący do $\mathbb{Z}_5[X]$;
- (b) stopnia 3 należący do $\mathbb{Z}_7[X]$;
- (c) stopnia 4 należący do $\mathbb{Z}_2[X]$.

6. Rozłożyć podane wielomiany na czynniki nierozkładalne w podanych pierścieniach:
- (a) $X^5 - 1$ w $\mathbb{Q}[X]$;
- (b) $X^4 + 1$ w $\mathbb{Z}_5[X]$;
- (c) $2X^3 + X^2 + 4X + 2$ w $\mathbb{Q}[X]$.
- (d) $X^4 - 9X + 3$ w $\mathbb{Q}[X]$;
- (e) $X^3 - 4X + 1$ w $\mathbb{Q}[X]$;
- (f) $X^8 - 16$ w $\mathbb{Q}[X]$;
- (g) $X^8 - 16$ w $\mathbb{R}[X]$;
- (h) $X^8 - 16$ w $\mathbb{C}[X]$;
- (i) $X^8 - 16$ w $\mathbb{Z}_{17}[X]$.

7. Załóżmy, że R jest dziedziną, element $p \in R$ jest nierozkładalny oraz $u \in R^*$. Udowodnić, że element $q = up$ też jest nierozkładalny.

8. Niech R będzie dziedziną i $a, b \in R$. Załóżmy, że a nie dzieli b oraz element a jest nierozkładalny. Udowodnić, że największy wspólny dzielnik a i b to 1.

9. Załóżmy, że p jest liczba pierwszą.
- (a) Udowodnić, że $(X - a)|(X^{p-1} - 1)$ w $\mathbb{Z}_p[X]$ dla każdego $a \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$.
- (b) Obliczyć iloraz $(X^{p-1} - 1)/(X - a)$ w $\mathbb{Z}_p[X]$, gdzie $p = 5$ i $a = 2$.
- (c) Udowodnić, że w pierścieniu $\mathbb{Z}_p[X]$ zachodzi:

$$X^{p-1} - 1 = (X - 1) \cdot (X - 2) \cdot \ldots \cdot (X - p + 1).$$