ALGEBRA 1, Lista 11

Konwersatorium 10.01.2025, Ćwiczenia 10.01.2025.

0S. Materiał teoretyczny: Norma euklidesowa i pierścień euklidesowy: definicja. Pierścień Gaussa i pierścień wielomianów nad ciałem jako pierścienie euklidesowe. Podzielność i elementy stowarzyszone w pierścieniu R. Największy wspólny dzielnik i najmniejsza wspólna wielokrotność w pierścieniu R. Istnienie największego wspólnego dzielnika w pierścieniu euklidesowym. Algorytm Euklidesa w $\mathbb{Z}$ oraz w dowolnym pierścieniu euklidesowym R. Twierdzenie Bézout.

1K. Wykonać dzielenie z resztą w następujących pierścieniach euklidesowych. Podzielić:
   (a) $X^2 + 3X + 8$ przez $X + 1$ w $\mathbb{R}[X]$;
   (b) $X^2 + 3X + 3$ przez $X + 1$ w $\mathbb{Z}_5[X]$;
   (c) $3i$ przez $1 + i$ w $\mathbb{Z}[i]$.

2K. Niech K będzie ciałem. Udowodnić, że w pierścieniu euklidesowym $K[X]$ (normą Euklidesa jest stopień wielomianu) iloraz i reszta w dzieleniu z resztą są wyznaczone jednoznacznie.

3. W podanym pierścieniu euklidesowym R, dla elementów $a, b \in R$, znaleźć elementy $r, s, t \in R$, takie że r jest największym wspólnym dzielnikiem a i b oraz $r = as + bt$.
   (a) $a = 2891,\ b = 1589,\ R = \mathbb{Z}$.
   (b) $a = 2X^3 - 4X^2 - 8X + 1,\ b = 2X^3 - 5X^2 - 5X + 2,\ R = \mathbb{Q}[X]$.
   (c) $a = X^4 + 2,\ b = X^3 + 3,\ R = \mathbb{Z}_5[X]$.
   (d) $a = 4 - i,\ b = 1 + i,\ R = \mathbb{Z}[i]$.

4. Czy w podanym pierścieniu R dane elementy $a, b \in R$ są stowarzyszone?
   (a) $a = 5$, $b = -5$, $R = \mathbb{Z}$.
   (b) $a = 2$, $b = 4$, $R = \mathbb{Z}$.
   (c) $a = X + 1$, $b = 5X + 5$, $R = \mathbb{Q}[X]$.
   (d) $a = X + 1$, $b = 5X + 6$, $R = \mathbb{Q}[X]$.
   (e) $a = X + 1$, $b = 5X + 5$, $R = \mathbb{Z}[X]$.
   (f) $a = 1 + i$, $b = 1 - i$, $R = \mathbb{Z}[i]$.
   (g) $a = 1 + i$, $b = 2 + i$, $R = \mathbb{Z}[i]$.

5. Rozstrzygnąć, czy dany element jest odwracalny w danym pierścieniu. Jeśli tak, to znaleźć element odwrotny.
   (a) 105 w $\mathbb{Z}_{351}$.
   (b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ w $M_2(\mathbb{Z}_3)$.
   (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ w $M_2(\mathbb{Z}_4)$.
   (d) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ w $M_2(\mathbb{Z})$.
   (e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ w $M_2(\mathbb{Z})$.
   (f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ w $M_2(\mathbb{Q})$.

6. Czy funkcja
$$\delta : \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\} \to \mathbb{N}, \quad \delta(W) = \deg(W)$$
jest normą euklidesową w pierścieniu $\mathbb{Z}[X]$?

7. Załóżmy, że R jest dziedziną, $n \in \mathbb{N}$ i $W \in R[X]$ jest wielomianem stopnia n. Udowodnić, że W ma nie więcej niż n pierwiastków w R (wskazówka: rozważyć ciało ułamków pierścienia R i skorzystać z twierdzenia Bézout).

8. Ile pierwiastków ma wielomian $X^3 + 5X \in \mathbb{Z}_6[X]$ w pierścieniu $\mathbb{Z}_6$? Porównać wynik z poprzednim zadaniem.