ALGEBRA 1, Lista 1

Konwersatorium 4.10.2024, Ćwiczenia 4.10.2024.

Oznaczenia zadań i ich części: S: do samodzielnego wykonania, K: do omówienia na konwersatorium.

0S. Materiał teoretyczny (definicje, twierdzenia, przykłady): działanie w zbiorze, łączność, przemienność, element neutralny. Definicja grupy i pierwsze przykłady grup. Transport działania poprzez bijekcję.

1. Sprawdzić czy następujące działanie $*$ na danym zbiorze A jest łączne, przemienne i czy ma element neutralny.
   (a)S $A = \mathbb{N}_{>0}$; $m * n = \mathrm{NWD}(m, n)$.
   (b)S $A = \mathbb{N}_{>0}$; $m * n = \mathrm{NWW}(m, n)$.
   (c)S $A = \mathbb{N}$; $m * m = 2^{mn}$.
   (d)S $A = \mathbb{N}$; $m * n = m2^n$.
   (e)S $A = \mathbb{R}$; $m * n = (m + n)^2$.
   (g)K $A = \mathbb{N}_{>0}$; $m * n = m^n$.
2. Dla $r > 0$ niech $K_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant r\}$.
   (a) Narysować na płaszczyźnie Gaussa zbiór K_r.
   (b) Dla których $r > 0$ mnożenie liczb zespolonych jest działaniem w zbiorze K_r?
3. Sprawdzić czy następujące działanie $*$ na danym zbiorze A jest łączne, przemienne i czy ma element neutralny. Sprawdzić też, czy $(A, *)$ jest grupą.
   (a) $A = \mathbb{Q}$; $a * b = \frac{a+b}{2}$.
   (b) $A = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$; $a * b = \frac{a}{b}$.
   (c) $A = \mathbb{R}$; $x * y = x + y + 2$.
   (d) $A = \mathbb{N}$; $m * n = \min(m, n)$.
   (e) $A = \mathbb{N}$; $m * n = \max(m, n)$.
   (f) $A = \mathbb{N}$; $m * n = m$.
   (g) $A = \mathbb{N}$; $m * n = 2^{m+n}$.
   (h) $A = \mathbb{Z}$; $m * n = m - n$.
   (i) A to płaszczyzna; $P * Q$ to środek odcinka o końcach P, Q.
4. Załóżmy, że $f : A \to B$ jest bijekcją, $\circ$ jest działaniem na zbiorze A i $*$ jest działaniem indukowanym w zbiorze B przez działanie $\circ$ poprzez funkcję f. Udowodnić, że:
   (a) jeśli $\circ$ jest przemienne, to $*$ jest przemienne (na wykładzie był dowód analogicznego faktu dla łączności);
   (b) jeśli $\circ$ ma element neutralny w A, to $*$ ma element neutralny w B;
   (c) jeśli $(A, \circ)$ jest grupą, to $(B, *)$ jest grupą.
5. Załóżmy, że $\circ$ jest działaniem łącznym w skończonym zbiorze A. Udowodnić, że istnieje $a \in A$ takie, że $a \circ a = a$.
   Wskazówka
   Dla $x \in A$ oraz $l > 0$ niech x^l oznacza $\underbrace{x \circ \cdots \circ x}_{l \text{ razy}}$.
   (a) Zauważyć, że dla każdych $k, l > 0$ oraz $x \in A$ mamy:
   $$(x^k)^l = x^{kl}, \quad x^k x^l = x^{k+l}.$$
   (b) Dla $c \in A$ rozważyć elementy c^{2^k}, gdzie $k = 0, 1, 2, \dots$ i znaleźć $b \in A$ oraz $l \geqslant 2$, takie że $b^l = b$.
   (c) Udowodnić, że jeśli b i l są jak w (b) powyżej, to dla $a := b^{l-1}$ mamy $a \circ a = a$.
6. Podać przykład działania $*$ na zbiorze $\{0, 1\}$, takiego że
   $$0 * (0 * 0) \neq (0 * 0) * 0.$$
   Ile istnieje takich działań?