ALGEBRA 1, Lista 7

Konwersatorium 21.11.2023, Ćwiczenia 24.11.2023.

0S. Skończone grupy abelowe jako produkty grup cyklicznych: rozpoznawanie ich izomorficzności. Grupa kwaternionów Q_8 i klasyfikacja grup rzędu co najwyżej 8. Centrum grupy.

1S. Grupa przekształceń afinicznych prostej to poniższy zbiór funkcji $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
$$A = \{x \mapsto ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}.$$
(a) Udowodnić, że A jest grupą względem złożenia funkcji (podgrupą $S_{\mathbb{R}}$).
(b) Niech
$$H := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0 \right\}.$$
Udowodnić, że H jest podgrupą $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
(c) Udowodnić, że $A \cong H$.

2S. Znaleźć nietrywialne podgrupy $A, B < \mathbb{Z}_{15}$ takie, że funkcja
$$f : A \times B \to \mathbb{Z}_{15}, \quad f(a, b) = a +_{15} b$$
jest izomorfizmem.

3K. Wypisać wszystkie grupy abelowe rzędu 12 (z dokładnością do izomorfizmu, bez powtórzeń).

4K. Czy istnieje monomorfizm grup $f : G \to H$? Jesli tak, wskazać przykład i wyznaczyć obraz (wskazówka: taki monomorfizm istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje podgrupa $S \leqslant H$ taka, że $S \cong G$).
(a) $G = \mathbb{Z}_6,\ H = \mathbb{Z}_{24}$,
(b) $G = \mathbb{Z}_{10},\ H = \mathbb{Z}$,
(c) $G = \mathbb{Z}_6,\ H = \mathbb{Z}_{100}$,
(d) $G = \mathbb{Z}_{15},\ H = S_8$,
(e) $G = (\mathbb{R}, +),\ H = (\mathbb{Q}, +)$,
(f) $G = S_3,\ H = \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{18}$,
(g) $G = D_4,\ H = S_8$.

5. Sprawdzić, czy następujące grupy są izomorficzne:
(a) $\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_{36}$ i $\mathbb{Z}_{48} \times \mathbb{Z}_{18}$;
(b) $\mathbb{Z}_{21} \times \mathbb{Z}_{40}$ i $\mathbb{Z}_{168} \times \mathbb{Z}_5$;
(c) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$ i $\mathbb{Z}_{315}$.

6. Czy istnieją podgrupy właściwe K, H grupy kwaternionów Q_8 takie, że Q_8 jest produktem wewnętrznym K i H?

7. Wyznaczyć wszystkie elementy postaci x^2 w:
(a) grupie kwaternionów Q_8,
(b) grupie S_3,
(c) grupie S_4.
Czy tworzą one podgrupę? Czy jest to podgrupa normalna?

8. Udowodnić, że każda podgrupa grupy kwaternionów Q_8 jest jej dzielnikiem normalnym.

9. Udowodnić, że
$$Q_8/Z(Q_8) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$