

ALGEBRA 1, Lista 13

Konwersatorium 16.01.2024, Ćwiczenia 19.01.2024.

- 0S. Materiał teoretyczny: Chińskie twierdzenie o resztach. Ideał w pierścieniu R . Ideał główny. Pierścień euklidesowy jest dziedziną ideałów głównych. Pierścień ilorazowy. Jądro i obraz homomorfizmu pierścieni przemiennych z jedyneką oraz zasadnicze twierdzenie o homomorfizmie pierścieni. Opis pierścienia ilorazowego $K[X]/(W)$ (K jest ciałem), postać normalna elementów tego pierścienia oraz implikacja: jeśli W jest nierozkładalny, to pierścień $K[X]/(W)$ jest ciałem.
- 1S. W następujących pierścieniach ilorazowych sporządzić tabelki dodawania i mnożenia. Znaleźć wszystkie dzielniki zera w tych pierścieniach.
- $\mathbb{Z}_6/(3)$.
 - $(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)/((1, 2))$.
- 2K. Rozłóż podane wielomiany na czynniki nierozkładalne w podanych pierścieniach:
- $X^4 - 9X + 3$ w $\mathbb{Q}[X]$;
 - $X^3 - 4X + 1$ w $\mathbb{Q}[X]$;
 - $X^8 - 16$ w $\mathbb{Q}[X]$;
 - $X^8 - 16$ w $\mathbb{R}[X]$;
 - $X^8 - 16$ w $\mathbb{C}[X]$;
 - $X^8 - 16$ w $\mathbb{Z}_{17}[X]$.
- 3K. Czy dane wielomiany są nierozkładalne w podanym pierścieniu?
- $X^3 + X^2 + X + 1$ w $\mathbb{Q}[X]$.
 - $3X^8 - 4X^6 + 8X^5 - 10X + 6$ w $\mathbb{Q}[X]$.
 - $X^4 + X^2 - 6$ w $\mathbb{Q}[X]$.
 - $4X^3 + 3X^2 + X + 1$ w $\mathbb{Z}_5[X]$.
 - $X^5 + 15$ w $\mathbb{Q}[X]$.
 - $X^4 - 2X^3 + X^2 + 1$ w $\mathbb{R}[X]$.
4. Obliczyć sumę i iloczyn danych elementów w podanych pierścieniach ilorazowych i podać wyniki w postaci normalnej. Które z tych pierścieni ilorazowych są ciałami?
- $3X + 4 + I$ i $5X - 2 + I$ w $\mathbb{R}[X]/(X^2 - 7)$.
 - $X^2 + 3X + 1 + I$ i $-2X^2 + 4 + I$ w $\mathbb{Q}[X]/(X^3 + 2)$.
 - $X^2 + 1 + I$ i $X + 1 + I$ w $\mathbb{Z}_2[X]/(X^3 + X + 1)$.
5. Udowodnić istnienie poniższych izomorfizmów. Wskazówka: w każdym przypadku znaleźć epimorfizm pierścieni, którego jądrem jest odpowiedni ideał i zastosować zasadnicze twierdzenie o homomorfizmie pierścieni.
- $\mathbb{R}[X]/(X^2 + 5) \cong \mathbb{C}$.
 - $\mathbb{Q}[X]/(X^2 - 7) \cong \mathbb{Q}[\sqrt{7}] = \{a + b\sqrt{7} : a, b \in \mathbb{Q}\}$.
 - $\mathbb{Z}_{14}/(2) \cong \mathbb{Z}_2$.
 - $\mathbb{R}[X]/(X - r) \cong \mathbb{R}$, gdzie \mathbb{R} jest pierścieniem przemiennym z jedyneką i $r \in \mathbb{R}$.
 - $\mathbb{R}[X, Y]/(X + Y) \cong \mathbb{R}[Y]$.

6. Wyznacznik $\begin{vmatrix} 676 & 117 & 522 \\ 375 & 65 & 290 \\ 825 & 143 & 639 \end{vmatrix}$ jest dodatni i mniejszy od 100. Obliczyć ten wyznacznik za pomocą chińskiego twierdzenia o resztach.

Wskazówka: obliczyć wartość wyznacznika modulo 10 i modulo 11.

7. Załóżmy, że I, J są ideałami w pierścieniu R . Udowodnić, że $I \cap J$ oraz

$$I + J := \{i + j \mid i \in I, j \in J\}$$

też są ideałami w R . Podać przykład, gdzie $I \cup J$ nie jest ideałem w R .

8. Wskazać generatory następujących ideałów w danych pierścieniach euklidesowych:

- (a) $(2) \cap (3)$ w \mathbb{Z} ;
- (b) $(12) \cap (18)$ w \mathbb{Z} ;
- (c) $(X^2 - 1) \cap (X + 1)$ w $\mathbb{Q}[X]$.

Zauważyć ogólną prawidłowość.

9. Wskazać generatory następujących ideałów w danych pierścieniach euklidesowych:

- (a) $(2, 3)$ w \mathbb{Z} ;
- (b) $(9, 12)$ w \mathbb{Z} ;
- (c) $(X^2 + X + 1, X^2 + 1)$ w $\mathbb{Z}_2[X]$.

Zauważyć ogólną prawidłowość.