

Konwersatorium 19.12.2023, Ćwiczenia 22.12.2023.

- 0S. Materiał teoretyczny: Norma euklidesowa i pierścień euklidesowy: definicja. Pierścień Gaussa i pierścień wielomianów nad ciałem jako pierścienie euklidesowe. Podzielność i elementy stowarzyszone w pierścieniu R . Największy wspólny dzielnik i najmniejsza wspólna wielokrotność w pierścieniu R . Istnienie największego wspólnego dzielnika w pierścieniu euklidesowym. Algorytm Euklidesa w \mathbb{Z} oraz w dowolnym pierścieniu euklidesowym R .
- 1K. Wykonać dzielenie z resztą w następujących pierścieniach euklidesowych. Podzielić:
- $X^2 + 3X + 8$ przez $X + 1$ w $\mathbb{R}[X]$;
 - $X^2 + 3X + 3$ przez $X + 1$ w $\mathbb{Z}_5[X]$;
 - $3i$ przez $1 + i$ w $\mathbb{Z}[i]$.
- 2K. Niech K będzie ciałem. Udowodnić, że w pierścieniu euklidesowym $K[X]$ (normą Euklidesa jest stopień wielomianu) iloraz i reszta w dzieleniu z resztą są wyznaczone jednoznacznie.
3. W podanym pierścieniu euklidesowym R , dla elementów $a, b \in R$, znaleźć elementy $r, s, t \in R$, takie że r jest największym wspólnym dzielnikiem a i b oraz $r = as + bt$.
- $a = 2891, b = 1589, R = \mathbb{Z}$.
 - $a = 2X^3 - 4X^2 - 8X + 1, b = 2X^3 - 5X^2 - 5X + 2, R = \mathbb{Q}[X]$.
 - $a = X^4 + 2, b = X^3 + 3, R = \mathbb{Z}_5[X]$.
 - $a = 4 - i, b = 1 + i, R = \mathbb{Z}[i]$.
4. Czy w podanym pierścieniu R dane elementy $a, b \in R$ są stowarzyszone?
- $a = 5, b = -5, R = \mathbb{Z}$.
 - $a = 2, b = 4, R = \mathbb{Z}$.
 - $a = X + 1, b = 5X + 5, R = \mathbb{Q}[X]$.
 - $a = X + 1, b = 5X + 6, R = \mathbb{Q}[X]$.
 - $a = X + 1, b = 5X + 5, R = \mathbb{Z}[X]$.
 - $a = 1 + i, b = 1 - i, R = \mathbb{Z}[i]$.
 - $a = 1 + i, b = 2 + i, R = \mathbb{Z}[i]$.
5. Rozstrzygnąć, czy dany element jest odwracalny w danym pierścieniu. Jeśli tak, to znaleźć element odwrotny.
- 105 w \mathbb{Z}_{351} .
 - 11 w \mathbb{Z}_{2020} .
 - $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ w $M_2(\mathbb{Z}_3)$.
 - $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ w $M_2(\mathbb{Z}_4)$.
 - $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ w $M_2(\mathbb{Z})$.
 - $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ w $M_2(\mathbb{Z})$.
 - $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ w $M_2(\mathbb{Q})$.
6. Czy funkcja
- $$\delta : \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}, \quad \delta(W) = \deg(W)$$
- jest normą euklidesową w pierścieniu $\mathbb{Z}[X]$?