ALGEBRA 1, Lista 10

Konwersatorium 12.12.2023, Ćwiczenia 15.12.2023.

0S. Materiał teoretyczny: Funkcja i twierdzenie Eulera. Pierścienie wielomianów: definicja, podstawowe własności (stopień wielomianu, R: dziedzina $\Rightarrow R[X]$: dziedzina). Wielomiany a funkcje wielomianowe. Homomorfizm ewaluacji w punkcie. Podpierścienie. Ciało ułamków dziedziny: konstrukcja i podstawowe własności.

1S. Znaleźć następujące wartości funkcji Eulera:

$$\varphi(210), \qquad \varphi(384), \qquad \varphi(900).$$

2K. Czy następujące podzbiory $\mathbb{Z}[X]$ są podpierścieniami (z 1?) $\mathbb{Z}[X]$?
   (a) Zbiór wielomianów, których wyraz wolny jest podzielny przez 7.
   (b) Zbiór wielomianów, których suma współczynników jest równa 0.
   (c) Zbiór wielomianów, w których współczynnik przy X jest równy 0.

3K. Udowodnić, że:
   (a) jeśli R jest podpierścieniem ciała K, takim że dla każdego $x \in K$ istnieją $y, z \in R$, takie że $x = yz^{-1}$, to wtedy K jest izomorficzne z ciałem ułamków R;
   (b) ciało $\mathbb{Q}$ jest izomorficzne z ciałem ułamków pierścienia R, gdzie R jest dowolnym podpierścieniem z 1 ciała $\mathbb{Q}$;
   (c) zbiór

$$\mathbb{Q}[i] := \{a + bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Q}$$

   jest podpiersćieniem $\mathbb{C}$ i pierścień $\mathbb{Q}[i]$ jest ciałem;
   (d) ciało $\mathbb{Q}[i]$ jest izomorficzne z ciałem ułamków pierścienia $\mathbb{Z}[i]$;
   (e) ciało $\mathbb{Q}(X)$ jest izomorficzne z ciałem ułamków pierścienia $\mathbb{Z}[X]$.

4. Czy następujące podzbiory $\mathbb{Z}[X]$ są podpierścieniami (z 1?) $\mathbb{Z}[X]$?
   (a) $\{h \in \mathbb{Z}[X] \mid 5 \text{ dzieli } h(5)\}$.
   (b) Zbiór wielomianów, w których współczynniki przy nieparzystych potęgach X są równe 0.
   (c) $\{2f + (X^2 + 1)g \in \mathbb{Z}[X] \mid f, g \in \mathbb{Z}[X]\}$.
   (d) $\{Xf + (X^2 + 1)g \in \mathbb{Z}[X] \mid f, g \in \mathbb{Z}[X]\}$.

5. Niech $k \in \mathbb{Z}$ oraz

$$\mathbb{Z}_{(k)} := \left\{ \frac{n}{m} \in \mathbb{Q} \mid n, m \in \mathbb{Z} \text{ oraz } k \nmid m \right\}.$$

   Dla jakich liczb k zbiór $\mathbb{Z}_{(k)}$ jest podpierścieniem $\mathbb{Q}$?

6. Znaleźć wszystkie homomorfizmy pierścieni $\varphi : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}$ (wskazówka: $\varphi(1) = 1$).

7. Pokazać, że

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

   jest podpierścieniem pierścienia $M_2(\mathbb{R})$, który jest izomorficzny z ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$.

8. Podać przykład $f, g \in \mathbb{Z}_4[X] \setminus \{0\}$, takich że $fg \neq 0$ oraz:

$$\deg(fg) < \deg(f) + \deg(g).$$