

ALGEBRA 1, Lista 8

Konwersatorium 24.11.2021, Ćwiczenia 7.12.2021.

0S. Skończone grupy abelowe jako produkty grup cyklicznych: rozpoznawanie ich izomorficzności. Grupa kwaternionów Q_8 i klasyfikacja grup rzędu co najwyżej 8. Centrum grupy. Automorfizmy wewnętrzne grup: definicja, własności i przykłady. Grupa $\text{Inn}(G)$ automorfizmów wewnętrznych grupy G , związek z centrum grupy $Z(G)$. Relacja sprzężenia w grupie G . Opis relacji sprzężenia w przypadku grup permutacji.

1S. Znaleźć nietrywialne podgrupy $A, B < \mathbb{Z}_{15}$, takie że funkcja

$$f : A \times B \rightarrow \mathbb{Z}_{15}, \quad f(a, b) = a +_{15} b$$

jest izomorfizmem.

2S. Wypisać wszystkie grupy abelowe rzędu 12 (z dokładnością do izomorfizmu, bez powtórzeń).

3K. Niech $\sigma = (1, 2)(3, 4, 5) \in S_5$.

(a) Wypisać wszystkie permutacje τ w grupie S_5 , które są sprzężone z permutacją σ . Za każdym razem wskazać permutację f taką, że $\tau = \varphi_f(\sigma)$ (przypomnienie: $\varphi_g(x) = gxg^{-1}$).

(b) Znaleźć zbiór wszystkich permutacji w S_5 , które są przemiennie z permutacją σ (wskazówka: τ jest przemienna z $\sigma \iff \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma$).

4K. Załóżmy, że grupa G ma jedyną podgrupę H rzędu 25. Udowodnić, że $H \trianglelefteq G$. (wskazówka: dla $g \in G$, rozważyć podgrupę $\varphi_g(H) \leq G$).

5K. W następujących grupach G opisać klasy sprzężenia:

(a) $G = Q_8$;

(b) $G = D_3$;

(c) $G = D_4$.

6. Czy istnieje monomorfizm grup $f : G \rightarrow H$? Jeśli tak, wskazać przykład i wyznaczyć obraz. (wskazówka: taki monomorfizm istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje podgrupa $S \leq H$, taka że $S \cong G$).

(a) $G = \mathbb{Z}_6$, $H = \mathbb{Z}_{24}$,

(b) $G = \mathbb{Z}_{10}$, $H = \mathbb{Z}$,

(c) $G = \mathbb{Z}_6$, $H = \mathbb{Z}_{100}$,

(d) $G = \mathbb{Z}_{15}$, $H = S_8$,

(e) $G = (\mathbb{Q}, +)$, $H = (\mathbb{Z}, +)$

(f) $G = (\mathbb{R}, +)$, $H = (\mathbb{Q}, +)$,

(g) $G = S_3$, $H = \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_{18}$,

(h) $G = D_4$, $H = S_8$.

7. Sprawdzić, czy następujące grupy są izomorficzne:

(a) $\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_{36}$ i $\mathbb{Z}_{48} \times \mathbb{Z}_{18}$;

(b) $\mathbb{Z}_{21} \times \mathbb{Z}_{40}$ i $\mathbb{Z}_{168} \times \mathbb{Z}_5$;

(c) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$ i \mathbb{Z}_{315} .

8. Czy istnieją podgrupy właściwe K, H grupy kwaternionów Q_8 , takie że Q_8 jest produktem wewnętrznym K i H ?

9. Udowodnić, że każda podgrupa grupy kwaternionów Q_8 jest jej dzielnikiem normalnym.

10. Udowodnić, że:

$$Q_8/Z(Q_8) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$