ALGEBRA 1, Lista 11

Konwersatorium 15.12.2021, Ćwiczenia 11.01.2022.

0S. Materiał teoretyczny: Ciało ułamków dziedziny: konstrukcja i podstawowe własności. Przykłady: $\mathbb{Q}$ jako ciało ułamków $\mathbb{Z}$ i ciało funkcji wymiernych. Norma euklidesowa i pierścień euklidesowy: definicja. Pierścień Gaussa i pierścień wielomianów nad ciałem jako pierścienie euklidesowe. Podzielność i elementy stowarzyszone w pierścieniu R. Największy wspólny dzielnik i najmniejsza wspólna wielokrotność w pierścieniu R. Istnienie największego wspólnego dzielnika w pierścieniu euklidesowym. Algorytm Euklidesa w $\mathbb{Z}$ oraz w dowolnym pierścieniu euklidesowym R.

1S. Wykonać dzielenie z resztą w następujących pierścieniach euklidesowych. Podzielić:
   (a) $X^2 + 3X + 8$ przez $X + 1$ w $\mathbb{R}[X]$;
   (b) $X^2 + 3X + 3$ przez $X + 1$ w $\mathbb{Z}_5[X]$;
   (c) $3i$ przez $1 + i$ w $\mathbb{Z}[i]$.

2K. Udowodnić, że:
   (a) jeśli R jest podpierścieniem ciała K, takim że dla każdego $x \in K$ istnieją $y, z \in R$, takie że $x = yz^{-1}$, to wtedy K jest izomorficzne z ciałem ułamków R;
   (b) ciało $\mathbb{Q}$ jest izomorficzne z ciałem ułamków pierścienia R, gdzie R jest dowolnym podpierścieniem z 1 ciała $\mathbb{Q}$;
   (c) ciało $\mathbb{Q}[i]$ jest izomorficzne z ciałem ułamków pierścienia $\mathbb{Z}[i]$;
   (d) ciało $\mathbb{Q}(X)$ jest izomorficzne z ciałem ułamków pierścienia $\mathbb{Z}[X]$.

3K. Czy funkcja

$$\delta : \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\} \to \mathbb{N}, \quad \delta(W) = \deg(W)$$

jest normą euklidesową w pierścieniu $\mathbb{Z}[X]$?

4. W podanym pierścieniu euklidesowym R, dla elementów $a, b \in R$, znaleźć elementy $r, s, t \in R$, takie że r jest największym wspólnym dzielnikiem a i b oraz $r = as + bt$.
   (a) $a = 2891,\ b = 1589,\ R = \mathbb{Z}$.
   (b) $a = 2X^3 - 4X^2 - 8X + 1,\ b = 2X^3 - 5X^2 - 5X + 2,\ R = \mathbb{Q}[X]$.
   (c) $a = X^4 + 2,\ b = X^3 + 3,\ R = \mathbb{Z}_5[X]$.
   (d) $a = 4 - i,\ b = 1 + i,\ R = \mathbb{Z}[i]$.

5. Czy w podanym pierścieniu R dane elementy $a, b \in R$ są stowarzyszone?
   (a) $a = 5$, $b = -5$, $R = \mathbb{Z}$.
   (b) $a = 2$, $b = 4$, $R = \mathbb{Z}$.
   (c) $a = X + 1$, $b = 5X + 5$, $R = \mathbb{Q}[X]$.
   (d) $a = X + 1$, $b = 5X + 6$, $R = \mathbb{Q}[X]$.
   (e) $a = X + 1$, $b = 5X + 5$, $R = \mathbb{Z}[X]$.
   (f) $a = 1 + i$, $b = 1 - i$, $R = \mathbb{Z}[i]$.
   (g) $a = 1 + i$, $b = 2 + i$, $R = \mathbb{Z}[i]$.

6. Rozstrzygnąć, czy dany element jest odwracalny w danym pierścieniu. Jeśli tak, to znaleźć element odwrotny.
   (a) 105 w $\mathbb{Z}_{351}$.
   (b) 11 w $\mathbb{Z}_{2020}$.
   (c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ w $M_2(\mathbb{Z}_3)$.
   (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ w $M_2(\mathbb{Z}_4)$.
   (e) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ w $M_2(\mathbb{Z})$.
   (f) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ w $M_2(\mathbb{Z})$.
   (g) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ w $M_2(\mathbb{Q})$.