

ALGEBRA 1, Lista 11

Konwersatorium 21.12.2020.

0S. Materiał teoretyczny: Ciało ułamków dziedziny: konstrukcja i podstawowe własności. Przykłady: \mathbb{Q} jako ciało ułamków \mathbb{Z} i ciało funkcji wymiernych. Norma euklidesowa i pierścień euklidesowy: definicja.

1S. Wykonać dzielenie z resztą w następujących pierścieniach euklidesowych. Podzielić:

(a) $X^2 + 3X + 8$ przez $X + 1$ w $\mathbb{R}[X]$;

(b) $X^2 + 3X + 3$ przez $X + 1$ w $\mathbb{Z}_5[X]$;

(c) $3i$ przez $1 + i$ w $\mathbb{Z}[i]$.

2K. Udowodnić, że:

(a) podzbiór

$$\mathbb{Q}[i] := \{a + bi \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{C}$$

jest podpierścieniem \mathbb{C} ;

(b) pierścień $\mathbb{Q}[i]$ jest ciałem;

(c) ciało $\mathbb{Q}[i]$ jest izomorficzne z ciałem ułamków pierścienia $\mathbb{Z}[i]$;

(d) ciało $\mathbb{Q}(X)$ jest izomorficzne z ciałem ułamków pierścienia $\mathbb{Z}[X]$.

3K. Czy funkcja

$$\delta : \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}, \quad \delta(W) = \deg(W)$$

jest normą euklidesową w pierścieniu $\mathbb{Z}[X]$?