
WdM - Lista 4 (29 X 2025)

Zad. 1 Zapisz poniższe zbiory symbolicznie, używając funkcji zdaniowych lub operacji.

- a) Zbiór liczb całkowitych podzielnych przez 7.
- b) Zbiór parzystych liczb całkowitych niedodatnich.
- c) Zbiór liczb naturalnych, których kwadrat daje resztę 1 przy dzieleniu przez 5.
- d) Zbiór potęg liczby 5 o wykładniku naturalnym.
- e) Zbiór całkowitych wielokrotności liczby $\sqrt{3}$.
- f) Zbiór wektorów długości 3, prostopadłych do wektora $\vec{v}$.
- g) Zbiór elementów przedziału $[a, b) \subseteq \mathbb{R}$.

Zad. 2 Opisz poniższy zbiór, jeżeli zakresem zmiennych $\vec{v}$ i $\vec{w}$ jest zbiór wektorów (algebraicznych) na płaszczyźnie.

$$\{\vec{v} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} : |\vec{v}| < 1\}.$$

Możesz posłużyć się rysunkiem.

Zad. 3 Zapisz symbolicznie zbiór tych podzbiorów $\mathbb{R}$, które mają niepusty przekrój z $\mathbb{Q}$.

Zad. 4 Znajdź wszystkie elementy zbioru A , jeżeli

- a) $A = \{n^2 + n : n \in \mathbb{Z} \wedge -2 \leq n < 1\}$,
- b) $A = \{2^k + l : k \in \{0, 2, 3\} \wedge l \in \{0, 2\}\}$,
- c) $A = \{\langle k, 3l \rangle \in \mathbb{N}^2 : k < 3 \wedge l < 2\}$,
- d) $A = \{X \in \mathcal{P}(\{1, 3, 5\}) : 1 \in X\}$,
- e) $A = \{\langle a, b, c \rangle \in \mathbb{N}^3 : a < b < c < 4\}$,
- f) $A = \{\langle X, Y \rangle \in \mathcal{P}(\{0, 1\}) \times \mathcal{P}(\{0, 1\}) : X \cap Y = \emptyset\}$.

Spróbuj opisać te zbiory potocznym językiem matematycznym.

Zad. 5 Zapisz symbolicznie (używając funkcji zdaniowej lub operacji) zbiór punktów leżących na:

- a) prostej zadanej równaniem ogólnym $2x + 3y + 5 = 0$,
- b) prostej zadanej równaniem parametrycznym $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$,
- c) okręgu zadany równaniem $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$,
- d) okręgu zadany równaniem parametrycznym $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix}$,
- e) półpłaszczyźnie opisanej nierównością $3x + 7y + 1 \geq 0$.

Zad. 6 Rozważmy układ równań

$$\begin{cases} 2x - 7y = 3, \\ 3x + 2y = 5. \end{cases}$$

- a) Zapisz zbiór rozwiązań tego układu używając odpowiedniej funkcji zdaniowej. Zamiast klamry łączącej równania użyj odpowiedniego spójnika logicznego.
- b) Podaj przykład układu równań równoważnego powyższemu (np. dodając stronami pierwsze równanie do drugiego) i zapisz fakt równoważności tych układów za pomocą równości zbioru rozwiązań.

Zad. 7 Naskicuj w układzie współrzędnych następujące zbiory.

- a) $\{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : x = \sin y \}$,
- b) $\{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : -2 < x^2 + y^2 \leq 3 \}$,
- c) $\{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : \sin x + \cos y > \pi \}$,
- d) $\{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : \text{istnieje } t \text{ takie, że } x \cdot t = y \}$,
- e) $\{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : x + 2 = y \vee 4x = 3y \}$,
- f) $\{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : x < |y| \implies y = 4x \}$,
- g) $\{ \langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : x < |y| \iff y = 4x \}$,