
WdM - Lista 6 (ćwiczenia 13 XI 2024)

Zad. 1 Zapisz poniższe funkcje zdaniowe symbolicznie. Które z nich są zdaniami? O ciągach zakładamy, że są ciągami liczb rzeczywistych, a o funkcji f , że jej dziedziną i przeciwdziedziną jest zbiór liczb rzeczywistych.

- a) Istnieje nieparzysta liczba naturalna.
- b) Liczba x przy dzieleniu przez 7 daje resztę 3.
- c) Istnieje liczba naturalna, która przy dzieleniu przez 7 daje resztę 3.
- d) Dla każdych różnych liczb rzeczywistych x i y zachodzi $x < y$ lub $y < x$.
- e) Liczba z jest rozwiązaniem równania $x^3 - x^2 + 1 = 0$.
- f) Żaden element zbioru A , który nie jest elementem zbioru B , nie jest rozwiązaniem równania $x^2 + x + 1 = 0$.
- g) Liczba $\sqrt{2}$ jest niewymierna. (Nie używaj tu symboli $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{I}\mathbb{Q}$.)
- h) Każdy zbiór jest podzbiorem pewnego zbioru.
 - i) Zbiór A ma co najmniej dwa elementy.
 - j) Zbiór A ma co najwyżej trzy elementy.
 - k) Zbiór A ma dokładnie dwa elementy.
 - l) Ciąg (a_n) jest nie rosnący ani malejący.
- m) Ciąg (a_n) ma zarówno wyrazy dodatnie jak i ujemne.
- n) Od pewnego miejsca wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie.
- o) Ciąg (a_n) ma nieskończenie wiele wyrazów ujemnych.
- p) punkt $(4, 1)$ jest punktem przecięcia prostych o równaniach parametrycznych $(x, y) = t(2, 1) + (0, -1)$ i $(x, y) = t(1, 1) + (1, -2)$.
- q) proste o równaniach parametrycznych $(x, y) = t(3, 1) + (1, 1)$ i $(x, y) = t(2, 1) + (3, 4)$ przecinają się.
- r) Funkcja f przyjmuje tylko wartości nieujemne.
- s) Istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych.
- t) Istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych.

Zad. 2 Podaj przykłady funkcji zdaniowych φ , dla których zachodzą poniższe warunki lub wyjaśnij, dlaczego takowe nie istnieją. Rozważ sytuację, w której mamy dany graf skierowany o wierzchołkach $\{0, 1, 2, 3\}$, a $\varphi(x, y)$ oznacza „istnieje strzałka z x do y ”.

- a) $\forall x \exists y \varphi(x, y)$ oraz $\neg(\exists x \forall y \varphi(x, y))$
- b) $\forall x, y (\varphi(x, y) \vee \varphi(y, x))$ oraz $\exists x, y \neg \varphi(x, y)$.
- c) $\forall x \exists y \varphi(x, y)$ oraz $\forall x \exists y \neg \varphi(x, y)$.
- d) $\forall x \varphi(x, x)$ oraz $\exists x \forall y \neg \varphi(x, y)$.
- e) $\forall x \exists y \varphi(x, y)$ oraz $\neg(\forall y \exists x \varphi(x, y))$.

Zad. 3 Wyznacz poniższe zbiory:

- a) $\bigcup_{n=0}^{\infty} (-\infty, n)$.
- b) $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (-\infty, n)$.
- c) $\bigcup_{n=1}^{\infty} (\frac{n-1}{n}, \frac{2n-1}{n})$.
- d) $\bigcup_{n=1}^{\infty} [2 + \frac{(-1)^n}{n}, 4 - \frac{(-1)^n}{n})$.
- e) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} : y > 1/(nx)\}$.
- f) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} : y \geq 1/(nx)\}$.

Wskazówka: naskicuj najpierw A_n dla paru wybranych n .

Zad. 4 Niech $A_n = (\frac{1}{n+1}, 1 + \frac{1}{n+1})$. Wyznacz zbiory

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n, \bigcap_{n=0}^{\infty} A_n, \bigcap_{m=0}^{\infty} \bigcup_{n>m}^{\infty} A_n, \bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcap_{n>m}^{\infty} A_n.$$