
WdM - Lista 12 (ćwiczenia 22 I 2025)

Zad. 1 Określ moce poniższych zbiorów (jeśli moc jest skończona lub większa niż $\mathfrak{c}$, nie trzeba jej wyznaczać dokładnie). Niektóre z poniższych podpunktów wymagają doprecyzowania; przeprowadź w takim wypadku odpowiednią dyskusję.

- a) zbiór liczb zespolonych;
- b) zbiór punktów na płaszczyźnie o obydwu współrzędnych wymiernych;
- c) zbiór $A^{\mathbb{N}}$, gdzie A jest zbiorem studentów, którzy zdadzą w tym semestrze WdM;
- d) zbiór prostych na płaszczyźnie;
- e) zbiór macierzy 3×3 ;
- f) zbiór macierzy 3×3 o niezerowym wyznaczniku;
- g) zbiór wszystkich przekształceń afinicznych płaszczyzny;
- h) zbiór funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, będących funkcjami kwadratowymi;
- i) zbiór funkcji kwadratowych $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o współczynnikach całkowitych;
- j) zbiór wszystkich funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$;
- k) zbiór wielomianów o współczynnikach rzeczywistych;
- l) zbiór wszystkich funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, które są różniczkowalne;
- m) zbiór wszystkich możliwych słów w alfabecie polskim (słowo definiujemy jako skończony ciąg elementów z alfabetu);
- n) zbiór wszystkich możliwych ułożeń figur szachowych na szachownicy;
- o) zbiór wszystkich możliwych skończonych rozgrywek szachowych;
- p) zbiór wszystkich możliwych poprawnych kodów w języku Python;
- q) zbiór wszystkich możliwych zadań z WdM;

Zad. 2 Wykaż, że $\mathcal{P}(A)$ nigdy nie jest mocy $\aleph_0$ (niezależnie od tego, czym jest zbiór A).

Zad. 3 Powiemy, że liczba rzeczywista r *da się zdefiniować*, jeśli istnieje jej definicja zapisana przy użyciu liter alfabetu polskiego, cyfr, symboli matematycznych i logicznych (przy czym definicja ta jest skończona).

- a) Czy istnieje liczba niewymierna, którą da się zdefiniować?
- b) Czy istnieje liczba wymierna, której nie da się zdefiniować?
- c) Ile jest liczb rzeczywistych, które da się zdefiniować?

Zad. 4 (★) Udowodnij, że jeżeli $|A| = |B|$, to $|\mathcal{P}(A)| = |\mathcal{P}(B)|$.

Zad. 5 (★) Udowodnij, że jeżeli $|A| = |B|$ i $|C| = |D|$, to $|A^C| = |B^D|$.

Zad. 6 (★) Udowodnij, że $|(A^B)^C| = |A^{B \times C}|$.