
Kolokwium 3/1 Grupa:

Imię i nazwisko:

Zad. 1 (4) Mamy daną relację równoważności $\sim$ na zbiorze X . Zapisz formalnie, przy pomocy kwantyfikatorów, stwierdzenia równoważne poniższym. Zabronione jest użycie symboli klasy abstrakcji i zbioru ilorazowego.

- a) $\sim$ ma przynajmniej dwie klasy abstrakcji,
- b) $\sim$ ma przynajmniej jedną klasę abstrakcji o przynajmniej dwóch elementach
- c) zbiór ilorazowy $\sim$ jest przynajmniej dwuelementowy.

Zad. 2 (3) Rozważmy relację równoważności $\sim$ na zbiorze liczb zespolonych $\mathbb{C}$ daną wzorem

$$z \sim z' \iff |z| = |z'|.$$

- a) Wyznacz klasę abstrakcji liczby 2.
- b) Opisz zbiór ilorazowy tej relacji.

Zad. 3 (3) Rozważmy porządek leksykograficzny na zbiorze W wszystkich słów zapisanych przy użyciu polskiego alfabetu (w tym bezsensownych). Zbadaj, czy zbiór $V \subseteq W$ składający się ze wszystkich słów, które zawierają Twoje imię, ma element najmniejszy.

Zad. 4 (5) Rozważmy relację na zbiorze X wszystkich ciągów liczb naturalnych daną wzorem

$$(n_k) \sim (m_k) \iff (n_0 = m_0 \wedge n_1 = m_1).$$

a) Uzasadnij, że jest to relacja równoważności.

b) Wyznacz klasę abstrakcji swojego ulubionego ciągu liczb naturalnych.

c) Opisz zbiór ilorazowy tej relacji.

d) Znajdź moc $\mathbb{N}_{/\sim}^{\mathbb{N}}$?

Zad. 5 (1) Podaj przykład zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$, który nie ma elementu największego, ale ma kres górny (w naturalnym porządku na $\mathbb{R}$).

Zad. 6 (2) Podaj przykład niepustej relacji na zbiorze $\{0, 1, 2, 3\}$, która nie jest zwrotna, ale jest symetryczna i przechodnia.

Zad. 7 (2) Czy relacja podzielności liczb naturalnych jest słabo antysymetryczna? Odpowiedź uzasadnij.

Zad. 8 (7) Podaj moc poniższych zbiorów (bez uzasadnienia). Jeśli moc jest skończona lub większa niż $\mathfrak{c}$, to nie trzeba jej dokładnie ustalać.

- a) Zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach całkowitych.
- b) Zbiór wszystkich sześcianów w $\mathbb{R}^3$ o długości boków będących liczbami naturalnymi.
- c) Maksymalna rodzina parami rozłącznych trójkątów na płaszczyźnie.
- d) Zbiór wszystkich punktów na płaszczyźnie o jednej współrzędnej wymiernej.
- e) Zbiór wszystkich skończonych ciągów zerojedynkowych.
- f) Zbiór wszystkich ciągów o wyrazach będących ciągami o wyrazach będących ciągami zerojedynkowymi .
- g) Zbiór wszystkich funkcji $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ postaci $f(x) = \log(ax)$ dla pewnego $a \in \mathbb{N}$.

Zad. 9 (3) Znajdź moc poniższego zbioru. Odpowiedź uzasadnij, posługując się twierdzeniami z wykładu.

$$(0, 1) \setminus \left\{ \frac{1}{\sqrt{n} + 1} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Brudnopsis
