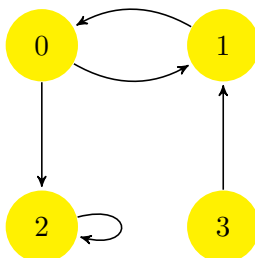


Zad. 1 (5) Mamy daną funkcję $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i liczbę $a \in \mathbb{R}$. Zapisz poniższe zdania symbolicznie (zabronione jest użycie symbolu obrazu).

- a) liczba a jest większa od pewnej wartości funkcji f .
- b) funkcja f nie jest różnowartościowa.
- c) funkcja f przyjmuje wartość 2 przynajmniej dwukrotnie.
- d) obraz zbioru $[0, 1]$ przez funkcję f ma niepusty przekrój ze zbiorem $[2, 3]$.

Zad. 2 (5) Załóżmy, że $X = \{0, 1, 2, 3\}$ i rozważmy funkcję zdaniową $\varphi(x, y)$ o następującym diagramie (tzn. $\varphi(x, y)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje strzałka z x do y).



- a) Wyznacz zbiór $\{\langle x, y \rangle : \varphi(x, y)\} \cap \{\langle x, y \rangle : \varphi(y, x)\}$
- b) Wyznacz zbiór $\{x : \exists y \varphi(x, y)\}$
- c) Wyznacz zbiór $\{y : \exists x \varphi(y, x)\}$
- d) Czy można z powyższego diagramu usunąć strzałki tak, żeby stał się diagramem pewnej funkcji $f: X \rightarrow X$? Usuń odpowiednie strzałki z diagramu lub uzasadnij, że nie można.

Zad. 3 (5) Mamy daną funkcję $F: \mathbb{R} \rightarrow C(\mathbb{R})$ daną wzorem

$$F(r) = \text{funkcja stała równa } r.$$

($C(\mathbb{R})$ jest zbiorem wszystkich funkcji ciągłych $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$)

a) Czy funkcja F jest różnowartościowa? Odpowiedź uzasadnij.

b) Czy funkcja F jest „na”? Odpowiedź uzasadnij.

c) Niech A będzie zbiorem funkcji ściśle rosnących. Znajdź $F^{-1}[A]$.

d) Znajdź złożenie $g \circ F$, przy czym $g: C(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ jest dana wzorem $g(f) = f(3)$.

Zad. 4 (1,5) Podaj przykład funkcji f o dziedzinie będącej zbiorem $\mathbb{R}$ i przeciwdziedzinie będącej zbiorem wektorów na płaszczyźnie.

Zad. 5 (1,5) Mamy daną funkcję $g: A \rightarrow B$. Podaj definicję przeciwbrazu zbioru $X \subseteq B$ przez funkcję g .

Zad. 6 (2) Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest dana wzorem $f(x) = \sin x$. Zapisz przeciwbraz $f^{-1}[(0, 2)]$ używając działania uogólnionego.

Kolokwium 2/3 Grupa:

Imię i nazwisko:

Zad. 7 (2) Podaj przykład funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, która nie jest różnowartościowa, ale jest „na”.
(Nie trzeba koniecznie definiować tej funkcji wzorem.)

Zad. 8 (5) Rozważmy funkcję $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ daną wzorem

$$f(n, k) = n - k.$$

- Znajdź $f[\{0, 1, 2\} \times \{0, 1, 2\}]$.
- Znajdź $f[\{2k: k \in \mathbb{N}\} \times \{2k + 1: k \in \mathbb{N}\}]$.
- Czy funkcja f jest „na”? Odpowiedź uzasadnij.
- Czy istnieje funkcja $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ taka, że $h \circ f$ jest funkcją identycznościową? Odpowiedź uzasadnij.

Zad. 9 (3) Wyznacz poniższe zbiory:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2n}, 1 + \frac{1}{3n}\right) =$$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}, 1 - \frac{1}{3n}\right] =$$

Brudnopsis
