
Część 1, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 1 (3) Zapisz poniższe zbiory za pomocą symboli matematycznych.

- a) zbiór wszystkich ciągów liczb naturalnych,
- b) zbiór punktów wykresu funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danej wzorem $f(x) = x^3$,
- c) zbiór wszystkich naturalnych potęg liczb naturalnych,
- d) zbiór wszystkich liczb naturalnych parzystych podzielnych przez 3.
- e) rodzina wszystkich podzbiorów zbioru liczb parzystych.

Zad. 2 (1,5) Podaj (dowolny) element zbioru A , o ile jakiś istnieje:

- a) $A = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.
- b) $A = \{n \in \mathbb{Z} : 3 \in \{n/2k : k \in \mathbb{N} \wedge k > 0\}\}$.
- c) $A = (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{Q}) \setminus \mathbb{R}^2$.

Zad. 3 (1,5) Mamy daną relację równoważności $\sim$ na zbiorze X . Zapisz formalnie, przy pomocy kwantyfikatorów, stwierdzenia równoważne poniższym. Zabronione jest użycie symboli klasy abstrakcji i zbioru ilorazowego.

- a) $\sim$ ma co najwyżej dwie klasy abstrakcji,
- b) $\sim$ nie ma jednoelementowej klasy abstrakcji.

Część 2, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 4 (3) Rozważmy funkcję $f: [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ daną wzorem

$$f(x) = \langle \cos x, \sin x \rangle.$$

a) Czy f jest funkcją różnowartościową? Odpowiedź uzasadnij.

b) Czy f jest funkcją „na”? Odpowiedź uzasadnij.

c) Wyznacz $f^{-1}[\{\langle x, y \rangle : x \leq 0 \wedge y \leq 0\}]$.

Zad. 5 (1,5) Zapisz zbiór rozwiązań nierówności $\{x\} \geq 1/2$ używając symbolu nieskończonej operacji na zbiorach. (Tutaj $\{x\}$ jest częścią ułamkową liczby x .)

Zad. 6 (1,5) Podaj przykład tautologii o zmiennych a, b, c .

Część 3, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 7 (3) Rozważmy funkcję $\varphi: \mathcal{P}((0, \infty)) \setminus \{\emptyset\} \rightarrow [0, \infty)$ daną wzorem

$$\varphi(A) = \inf A.$$

- a) Czy φ jest funkcją różnowartościową? Odpowiedź uzasadnij.

- b) Czy φ jest funkcją „na”? Odpowiedź uzasadnij.

- c) Niech X będzie rodziną wszystkich podzbiorów $(0, \infty)$, które mają najmniejszy element. Wyznacz obraz zbioru X przez funkcję φ .

Zad. 8 (1) Niech $\approx$ będzie relacją na zbiorze X . Zapisz formalnie, co to znaczy, że relacja $\approx$ jest słabo antysymetryczna.

Zad. 9 (2) Narysuj diagram relacji R na zbiorze $\{0, 1, 2, 3\}$, która nie jest relacją równoważności, ale jest zwrotna i symetryczna.

Część 4, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 10 (3) Na zbiorze wszystkich ciągów liczb naturalnych wprowadzamy relację równoważności

$$(x_n) \sim (y_n) \iff 2|(x_2 - y_2).$$

- Wyznacz klasę abstrakcji ciągu stale równego zero i podaj jej moc.

- Podaj moc zbioru ilorazowego tej relacji.

Zad. 11 (3) Na zbiorze $C(\mathbb{R})$ wszystkich funkcji ciągłych $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wprowadzamy relację równoważności

$$f \sim g \iff \exists r \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} f(x) = g(x) + r.$$

- a) Uzasadnij, że $\sim$ jest przechodnia. .

- b) Wyznacz klasę abstrakcji funkcji stale równej 0.

- c) Czy w każdej klasie abstrakcji znajdziemy funkcję różniczkowalną? Odpowiedź uzasadnij.

Część 5, Egzamin

Imię i nazwisko:

Zad. 12 (3) Ustal moce poniższych zbiorów (bez uzasadnień). Jeśli zbiór ma moc większą niż $\mathfrak{c}$, nie trzeba dokładnie określać jego mocy. Jeśli opis może odpowiadać zbiorom o różnych mocach, należy podać wszystkie możliwości.

- a) Zbiór wszystkich tautologii o zmiennych p i q .
- b) Zbiór wszystkich funkcji o dziedzinie $\mathbb{N}$ i wartościach w $\{0, 1\}$.
- c) Zbiór wszystkich funkcji o dziedzinie $\{0, 1\}$ i wartościach w $\mathbb{N}$.
- d) Zbiór wszystkich ciągów liczb rzeczywistych, które są rozbieżne do $+\infty$.
- e) Zbiór wszystkich przekształceń liniowych płaszczyzny, które nie mają przekształceń odwrotnych.
- f) Zbiór wszystkich funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, które dla każdego $x \in \mathbb{R}$ przyjmują wartość x^2 .

Zad. 13 (3) O funkcji $\mu: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$ wiemy, że

- $\mu(\{x\}) = 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, oraz
- $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ dla każdego ciągu (A_n) podzbiorów $\mathbb{R}$.

Czy na podstawie powyższej informacji możemy ustalić poniższe wartości? Odpowiedź uzasadnij.

- a) $\mu(\mathbb{Z})$,
- b) $\mu(\mathbb{Q})$,
- c) $\mu(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.