
WdM - Lista 9 (ćwiczenia 19 XII 2023)

Zad. 1 Zbiór X składa się z 2 kwiatków czerwonych, 3 niebieskich i jednego kwiatka czarnego. Rozważmy na X relację

$$x \sim y \iff x \text{ i } y \text{ są tego samego koloru.}$$

- a) Podaj funkcję świadczącą o tym, że \sim jest relacją równoważności.
- b) Ile klas abstrakcji ma ta relacja?
- c) Niech $A \subseteq X$. Zapisz symbolicznie, używając symbolu " \sim ", zdanie "W zbiorze A nie ma dwóch kwiatków tego samego koloru".

Zad. 2 Podaj przykład paru podziałów zbioru \mathbb{R} . Dla każdego podziału podaj relację równoważności, której zbiór ilorazowy jest równy temu podziałowi.

Zad. 3 Podaj przykład relacji równoważności na zbiorze $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, która ma 2 klasy abstrakcji, w tym jedną, która ma 5 elementów. (Wskazówka: spróbuj najpierw wymyślić odpowiedni podział.)

Zad. 4 Rozważmy relację równoważności na \mathbb{R} zdefiniowaną przez

$$x \sim y \iff \sin x = \sin y.$$

- a) Wyznacz $[0]_{\sim}$.
- b) Wyznacz $[1]_{\sim}$, a następnie sprawdź, czy 1 jest elementem otrzymanego zbioru. Jeśli nie, wyznacz ten zbiór jeszcze raz, tym razem poprawnie.
- c) Wyznacz zbiór ilorazowy tej relacji.

Zad. 5 Na $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ definiujemy relację \sim w następujący sposób:

$$\langle x, y \rangle \sim \langle x', y' \rangle \iff x \cdot y' = y \cdot x'.$$

- Znajdź $[\langle 2, 1 \rangle]_{\sim}$.
- Znajdź funkcję świadczącą o tym, że relacja \sim jest relacją równoważności.
- Wyznacz $X_{/\sim}$.

Zad. 6 Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = x^2$. Na zbiorze \mathbb{R} zdefiniowano relację \sim w następujący sposób:

$$x \sim y \iff f^{-1}[\{x\}] \text{ i } f^{-1}[\{y\}] \text{ mają tyle samo elementów.}$$

- a) Podaj funkcję, która świadczy o tym, że \sim jest relacją równoważności.
- b) Wyznacz $[0]_{\sim}$, $[-1]_{\sim}$ i $[1]_{\sim}$.
- c) Ile klas abstrakcji ma ta relacja?

Zad. 7 Na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ zdefiniujemy relację \sim poprzez

$$A \sim B \iff A \cap \{0, 1, 2\} = B \cap \{0, 1, 2\}$$

- a) Wyznacz $[\emptyset]_{\sim}$.
- b) Ile elementów ma zbiór ilorazowy $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\sim$?

Zad. 8 Na zbiorze $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (a więc zbiorze wszystkich ciągów liczb rzeczywistych) zdefiniujemy relację \sim poprzez

$$(a_n) \sim (b_n) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0.$$

- a) Sprawdź, że ta relacja jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.
- b) Wyznacz $[(a_n)]_{\sim}$, gdzie (a_n) jest ciągiem stale równym 0.
- c) Czy każdy element zbioru ilorazowego $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\sim$ zawiera jako element jakiś ciąg zbieżny?

Zad. 9 Na zbiorze Φ wszystkich formuł logicznych o zmiennych p i q definiujemy relację \sim poprzez

$$\varphi \sim \psi \iff \varphi \text{ jest równoważna } \psi.$$

- Wyznacz klasę abstrakcji formuły $p \vee \neg p \vee q$.
- Ile elementów ma Φ/\sim ? Co to pytanie ma wspólnego z pytaniem: “ile jest formuł logicznych o dwóch zmiennych z dokładnością do równoważności”?
- Napisz funkcję $f: \Phi \rightarrow \{0, 1\}^4$ świadczącą o tym, że \sim jest relacją równoważności.