WdM - Lista 7 (ćwiczenia 27 XI 2023)

Zad. 1 Podaj przykład niepustej relacji R na zbiorze $\{0,1,2,3\}$ spełniającej poniższe własności lub wykaż, że takowa nie istnieje:

- R jest zwrotna, symetryczna i nieprzechodnia,
- R jest symetryczna, przechodnia i nie jest zwrotna,
- R jest symetryczna i słabo antysymetryczna.

Zad. 2 Co wiemy o funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jeśli relacja na $\mathbb{R}$ zdefiniowana przez

$$x\mathsf{R}y \iff y = f(x)$$

jest zwrotna?

Zad. 3 Rozważmy poniższe relacje R na X zdefiniowane przez następujące funkcje zdaniowe. Jakie własności mają te relacje? Sprawdź zwrotność, symetrię, słabą antysymetrię i przechodniość. Czy dla każdych $x, y \in X$ zachodzi $x\mathsf{R}y \vee y\mathsf{R}x$?

- $X = \mathbb{R}$, $x\mathsf{R}y \iff x < y$,
- $X = \mathbb{R}$, $x\mathsf{R}y \iff x > y$,
- $X = \mathbb{R}$, $x\mathsf{R}y \iff x \neq y$,
- $X = \mathbb{Z}$, $n\mathsf{R}k \iff n \cdot k \geq 0$,
- $X = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $A\mathsf{R}B \iff A \cap B \neq \emptyset$,
- X jest zbiorem wszystkich wektorów (algebraicznych) w $\mathbb{R}^2$, $\vec{v}\mathsf{R}\vec{w} \iff \exists r > 0\ \vec{v} = r \cdot \vec{w}$,
- $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (zbiór ciągów liczb rzeczywistych), $(a_n)\mathsf{R}(b_n) \iff (a_n)$ jest podciągiem (b_n),
- $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $f\mathsf{R}g \iff \{n \in \mathbb{N}\colon f(n) > g(n)\}$ jest skończony,
- $X =$ Zbiór zadań na tej liście, $z\mathsf{R}z' \iff z$ jest trudniejsze od z'.

Zad. 4 Udowodnij, że

$$(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c$$

dla każdego ciągu zbiorów (A_n).

Zad. 5 Wyznacz zbiory $\bigcup_{n\in I} A_n$ oraz $\bigcap_{n\in I} A_n$, jeżeli

a) $A_n = (-\infty, n)$, $I = \mathbb{N}$,

b) $A_n = (-\infty, n)$, $I = \mathbb{Z}$,

c) $A_n = (\frac{n-1}{n}, \frac{2n-1}{n})$, $I = \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

d) $A_n = [2 + \frac{(-1)^n}{n}, 4 - \frac{(-1)^n}{n})$, $I = \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

e) $A_n = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \colon y > 1/(nx)\}$, $I = \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

f) $A_n = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \colon y \geq 1/(nx)\}$, $I = \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Wskazówka: naszkicuj najpierw A_n dla paru wybranych n.

Zad. 6 Niech $A_n = (\frac{1}{n+1}, 1 + \frac{1}{n+1})$. Wyznacz zbiory

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n,\ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n,\ \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n>m} A_n,\ \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n>m} A_n.$$