
WdM - Lista 4 (31 X 2023)

Zad. 1 Niech $A \subseteq X$, $B \subseteq Y$. Zapisz $(A \times B)^c$ jako sumę iloczynów kartezjańskich.

Zad. 2 Naszkicuj w układzie współrzędnych zbiory A i B , będące rozłącznymi podzbiorem $[0, 1] \times [0, 1]$ takimi, że

$$\pi_{[0,1]}[A] = \pi_{[0,1]}[B] = \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right] = \pi^{[0,1]}[A] = \pi^{[0,1]}[B].$$

Zad. 3 Naszkicuj w układzie współrzędnych zbiór A , który ma 5 elementów i taki, że $\pi_{\mathbb{R}}[A]$ ma 2 elementy a $\pi^{\mathbb{R}}[A]$ jest zbiorem 3-elementowym.

Zad. 4 Zapisz funkcję zdaniową równoważną funkcji

$$\langle x, y \rangle \notin (A \cup B) \times (C \setminus D)$$

bez używania symboli mnogościowych (\cup , \setminus , \times , itd.)

Zad. 5 Załóżmy, że A , B , C i D są niepustymi zbiorami.

- a) Czy z tego, że $(A \times B) \subseteq (C \times D)$ wynika, że $A \subseteq C$ i $B \subseteq D$?
- b) Pokaż, że jeśli $A \times B = C \times D$, to $A = C$ i $B = D$.
- c) Czy z tego, że $(A \times B) \cap (C \times D) = \emptyset$ wynika, że $A \cap C = \emptyset$ i $B \cap D = \emptyset$?

Czy założenie niepustości jest potrzebne?

Zad. 6 Naszkicuj w układzie współrzędnych następujące zbiory.

- a) $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : x = \sin y\}$,
- b) $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : -2 < x^2 + y^2 \leq 3\}$,
- c) $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : \sin x + \cos y > \pi\}$,
- d) $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : \text{istnieje } t \text{ takie, że } x \cdot t = y\}$,
- e) $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : x + 2 = y \vee 4x = 3y\}$,
- f) $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : x < |y| \implies y = 4x\}$,
- g) $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : x < |y| \iff y = 4x\}$,

Zad. 7 Zauważmy, że każdy wektor (geometryczny) na płaszczyźnie można przedstawić jako parę uporządkowaną $\langle P, Q \rangle$, gdzie $P \in \mathbb{R}^2$ jest punktem zaczepienia wektora, a $Q \in \mathbb{R}^2$ jego końcem. Rozważmy zbiór wszystkich wektorów $S \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ o długości 1. Naszkicuj w układzie współrzędnych cięcie S_P zbioru S w punkcie P , gdzie P jest ustalonym (przez Ciebie) elementem płaszczyzny. Podobnie, naszkicuj zbiór $\pi_{\mathbb{R}^2}[S]$.

Zad. 8 Zdefiniujmy $A \subseteq \mathbb{N} \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ w następujący sposób

$$\langle n, N \rangle \in A \iff n \in N.$$

Znajdź rzuty A . Opisz A_0 , A^\emptyset , $A^{\{1\}}$.

Zad. 9 Niech A, B będą zbiorami. Znajdź wszystkie zbiory X takie, że

$$A \times X = X \times B.$$

Zad. 10 (*) Jaką cechę ma wykres zbioru $A \subseteq [0, 1] \times [0, 1]$ w układzie współrzędnych, jeśli wiemy, że dla każdego $x \in [0, 1]$ zachodzi $A_x = A^x$?

Zad. 11 (*) O zbiorze $A \subseteq [0, 1] \times [0, 1]$ wiemy, że $A_x = [0, \sqrt{x}]$ dla każdego $x \in [0, 1]$. Podaj A^y dla $y \in [0, 1]$.