
Część 1, Kolokwium 2 Grupa: Imię i nazwisko:

Zad. 1 (5) Niech S będzie zbiorem wszystkich studentów, a $\varphi(x)$ funkcją zdaniową x zda egzamin z WdM. Zapisz poniższe zdania używając kwantyfikatorów i podanych oznaczeń.

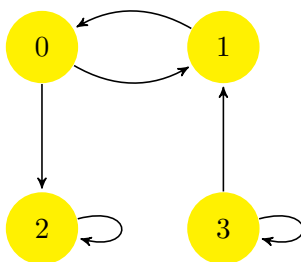
Każdy student zda egzamin z WdM.

Żaden student nie zda egzaminu z WdM.

Co najwyżej dwóch studentów zda egzamin z WdM.

Jeśli któryś student zda egzamin z WdM, to Hugo zda egzamin z WdM.

Zad. 2 (5) Załóżmy, że relacja R na zbiorze $X = \{0, 1, 2, 3\}$ ma następujący diagram:



- a) Czy ta relacja jest przechodnia?
- b) Wyznacz dopełnienie zbioru $\{(x, y) : (xRy) \implies (yRx)\}$.
- c) Czy prawdziwe jest zdanie $\exists x \in X \forall y \in X (yRx \vee \exists z Ry)$? Uzasadnij!
- d) Czy można dodać do powyższego diagramu strzałki tak, żeby R stała się relacją częściowego porządku? Dodaj odpowiednie lub uzasadnij, że nie można.

Część 2, Kolokwium 2 Grupa: Imię i nazwisko:

Zad. 3 (4) Rozważmy funkcję $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ przypisującą liczbie jej część ułamkową (tzn. $f(x) = x - [x]$, gdzie $[x]$ jest częścią całkowitą liczby x).

- Czy f jest różnowartościowa? Odpowiedź uzasadnij.

- Znajdź $f^{-1}[(0, 1/2)]$.

- Czy prawdziwe jest poniższe zdanie? Odpowiedź uzasadnij.

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists y > x \ f(y) \leq f(x).$$

Zad. 4 (4) Niech $F: \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ jest zbiorem wszystkich ciągów liczb rzeczywistych).

$$F((a_n)) = a_2.$$

- Czy funkcja F jest różnowartościowa? Odpowiedź uzasadnij.

- Znajdź $F[\{(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}: (a_n) \text{ jest zbieżny do } 0\}]$.

Część 3, Kolokwium 2 Grupa: Imię i nazwisko:

Zad. 5 (3) Załóżmy, że (X, \leq) jest zbiorem częściowo uporządkowanym. Odpowiedz na poniższe pytania podając uzasadnienia.

a) Czy z faktu, że $x \leq y$ wynika, że $\neg(y < x)$?

b) Czy z faktu, że $\neg(x < y)$ wynika, że $y \geq x$?

Zad. 6 (2) Podaj przykład nieskończonego zbioru $A \subseteq \mathbb{N}$ takiego, że $(A, |)$ jest zbiorem liniowo uporządkowanym.

Zad. 7 (5) Rozważmy następujący częściowy porządek \preceq określony na \mathbb{Z} :

$$n \preceq k \iff (|n| < |k| \vee n = k).$$

- Czy zbiór częściowo uporządkowany (\mathbb{Z}, \preceq) ma element najmniejszy? Największy? Podaj uzasadnienie.

- Czy \preceq jest porządkiem liniowym? Podaj uzasadnienie.

- Znajdź elementy minimalne, maksymalne i kresy zbioru $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.