Część 1, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 1 (3) Mamy dany ciąg (a_n) liczb całkowitych. Zapisz formalnie, używając kwantyfikatorów (i nie używając oznaczenia na moc):

a) Wszystkie wyrazy ciągu (a_n) są większe od 2.

b) Co najmniej dwa wyrazy ciągu (a_n) są dodatnie.

c) Ciąg (a_n) ma nieskończenie wiele wyrazów ujemnych.

d) Ciąg (a_n) jest zbieżny do 2.

Zad. 2 (1) Podaj przykład niepustych zbiorów A, B, C takich, że $A \cap B = C \setminus A$.

Zad. 3 (2) Podaj przykład formuł logicznych $\alpha(p, q)$, $\beta(p, q)$, $\gamma(p, q)$, $\delta(p, q)$ spełniających oba poniższe warunki:

- formuły te są parami nierównoważne,
- formuła

$$\big(\alpha(p,q) \implies \beta(p,q)\big) \wedge \big(\beta(p,q) \implies \gamma(p,q)\big) \wedge \big(\gamma(p,q) \implies \delta(p,q)\big)$$

  jest tautologią.

Część 2, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 4 (3) Rozważmy funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ daną wzorem

$$f(x) = \langle x, x+1 \rangle.$$

a) Czy f jest funkcją różnowartościową? Odpowiedź uzasadnij.

b) Czy f jest funkcją „na"? Odpowiedź uzasadnij.

c) Wyznacz $f^{-1}[\{0,1,2,3\} \times \{0,1,2,3\}]$.

Zad. 5 (1.5) Zapisz zbiór rozwiązań nierówności $\operatorname{tg} x \geq 0$ używając symbolu nieskończonej operacji na zbiorach.

Zad. 6 (1.5) Niech $X = \{0,1,2,3,4\}$. Podaj przykład takiej funkcji $f\colon X \to X$ i zbiorów $A, B \subseteq X$, że

$$f[A \cap B] \neq f[A] \cap f[B].$$

Część 3, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 7 (3) Rozważamy zbiór częściowo uporządkowany $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subseteq)$.

a) Podaj przykład zbiorów $A, B, C \subseteq \mathbb{N}$, które są parami nieporównywalne.

b) Znajdź kresy (o ile istnieją) zbioru $\{A \subseteq \mathbb{N} \colon 100 \in A\}$.

c) Czy zbiór $\mathcal{P}(\{0, 1, 2, 3\})$ ma element największy? Odpowiedź uzasadnij.

Zad. 8 (1.5) Podaj przykład zbioru częściowo uporządkowanego $(X, \leq)$, w którym jest dokładnie jeden element maksymalny, ale nie ma elementu największego.

Zad. 9 (1.5) Podaj przykład relacji, która jest zwrotna i przechodnia, ale nie jest słabo antysymetryczna.

Część 4, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 10 (3) Na zbiorze $\mathbb{R}^2 \setminus \{\langle 0,0\rangle\}$ wprowadzamy relację równoważności wzorem

$$\langle x,y\rangle \sim \langle x',y'\rangle \iff x\cdot y' = x'\cdot y.$$

- Wyznacz klasę abstrakcji $[\langle 1,2\rangle]_\sim$.

- Opisz zbiór ilorazowy tej relacji.

Zad. 11 (3) Na zbiorze $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ wprowadzamy relację równoważności

$$A \sim B \iff \text{ istnieje translacja } T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \text{ taka, że } T[A] = B.$$

a) Ile elementów ma klasa abstrakcji zbioru pustego?

b) Znajdź klasę abstrakcji $[\{\langle 1,2\rangle\}]_\sim$.

c) Czy zbiór ilorazowy tej relacji jest przeliczalny? Odpowiedź uzasadnij.

Część 5, Egzamin Imię i nazwisko:

Zad. 12 (1) O zbiorze $A \subseteq [0,1]^2$ wiemy, że cięcie A_x jest zbiorem przeliczalnym dla każdego $x \in [0,1]$. Czy stąd wynika, że A jest przeliczalny? Odpowiedź uzasadnij.

Zad. 13 (2) Funkcja $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ jest *okresowa*, jeśli istnieje dodatnia liczba naturalna n, taka, że $f(k+n) = f(k)$ dla każdego k. Podaj moc zbioru wszystkich funkcji okresowych, z krótkim uzasadnieniem.

Zad. 14 (3) Ustal moce poniższych zbiorów (bez uzasadnień). Jeśli zbiór ma moc większą niż $\mathfrak{c}$, nie trzeba dokładnie określać jego mocy. Jeśli opis może odpowiadać zbiorom o różnych mocach, należy podać wszystkie możliwości.

a) Zbiór wszystkich prostokątów na płaszczyźnie.

b) Zbiór wszystkich podzbiorów zbioru liczb niewymiernych.

c) Zbiór wszystkich liczb zespolonych.

d) Zbiór $\mathbb{Q} \times \mathbb{Z} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

e) Zbiór wszystkich funkcji $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, które mają funkcje odwrotne.

f) Rodzina wszystkich zbiorów $A \subseteq \mathbb{R}^2$, które mają pusty rzut na pierwszą oś.