

---

**WdM - Lista 8** (ćwiczenia 10/14 XII 2020)

---

**Zad. 1** Narysuj diagram Hassego relacji  $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ , gdzie  $X = \{0, 1, 2\}$ . Wskaż elementy minimalne i maksymalne. Czy istnieje element największy i najmniejszy? Wskaż kres górny i kres dolny zbioru  $\mathcal{P}(X)$  w  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ .

**Zad. 2** Zdefiniuj na podanych zbiorach 3 różne relacje częściowego porządku:

- a)  $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,
- b)  $\mathbb{N}$ .

Wskazówka: pomyśl o diagramach Hassego.

**Zad. 3** Zdefiniujmy częściowy porządek  $(\mathbb{R}^2, \preceq)$  poprzez

$$\langle x, y \rangle \preceq \langle x', y' \rangle \iff x \leq x' \wedge y \leq y'.$$

- a) Narysuj w układzie współrzędnych zbiór punktów porównywalnych z  $\langle 1, 2 \rangle$ .
- b) Wyznacz kres górny zbioru  $\{\langle x, y \rangle : x^2 + y^2 = 1\}$ .
- c) Naszkicuj zbiór  $D$ , który ma jeden element maksymalny, ale nie ma elementu największego.

Czy relacja na  $\mathbb{R}^2$  zdefiniowana wzorem

$$\langle x, y \rangle \sqsubseteq \langle x', y' \rangle \iff x \leq x' \wedge y \geq y'$$

jest relacją częściowego porządku? Jeśli tak, to powtórz dla niej powyższe polecenia.

Powtórz powyższe polecenia dla relacji zdefiniowanej przez

$$\langle x, y \rangle \leq_{lex} \langle x', y' \rangle \iff (x < x' \vee (x = x' \wedge y \leq y')).$$

**Zad. 4** Narysuj diagram Hassego takiego częściowego porządku  $(X, \leq)$ , że

- a)  $X$  ma 7 elementów, w tym dwa elementy maksymalne i 3 minimalne,
- b)  $X$  ma nieskończenie wiele elementów i dokładnie dwa elementy maksymalne, w tym jeden minimalny.

W każdym wypadku znajdź  $X \subseteq \mathbb{N}$  taki, że  $(X, |)$  ma odpowiedni diagram Hassego.

**Zad. 5** Niech  $(X, \leq)$  będzie zbiorem częściowo uporządkowanym, niech  $A, B \subseteq X$  i  $a, b \in X$ . Zapisz symbolicznie poniższe zdania

- a)  $(X, \leq)$  jest liniowo uporządkowany,
- b)  $a$  jest ograniczeniem dolnym zbioru  $A$ ,
- c)  $a$  jest kresem dolnym zbioru  $A$ ,
- d)  $a$  jest elementem największym zbioru  $A$ ,
- e)  $A$  jest zbiorem elementów minimalnych  $B$ ,
- f) każdy element zbioru  $A$  ogranicza z dołu zbiór  $B$ ,
- g)  $a$  jest mniejsze od  $b$  i pomiędzy nimi istnieją co najmniej 2 różne elementy  $X$ .

Zapisz też negacje powyższych zdań, bez użycia symbolu negacji. Zamiast używać praw de Morgana, postaraj się raczej zrozumieć, co *znaczą* te zaprzeczenia.

**Zad. 6** Rozważmy następującą relację częściowego porządku na ciągach liczb naturalnych  $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ .

$$(a_n) \preceq (b_n) \iff \forall n \ a_n \leq b_n,$$

przy czym „ $\leq$ ” jest standardowym porządkiem na liczbach naturalnych.

- Wyznacz zbiór elementów porównywalnych z  $(a_n)$  danym wzorem  $a_n = n$ .
- Czy  $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \preceq)$  ma element największy? Najmniejszy?
- Niech  $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  będzie rodziną wszystkich ciągów różnowartościowych. Czy  $A$  jest zbiorem ograniczonym?

**Zad. 7** Rozważmy  $(\mathbb{Q}, \leq)$  (gdzie  $\leq$  jest standardowym porządkiem). Wskaż  $A \subseteq \mathbb{Q}$ , który jest ograniczony z góry, ale nie ma kresu górnego.