
WdM - Lista 3 (26/29 X 2020)

Zad. 1 Wybierz dwa prawa rachunku zbiorów i udowodnij je formalnie (postaraj się wybrać inne prawa niż te udowodnione na wykładzie).

Zad. 2 Wskaż przykład niepustych zbiorów skończonych takich, że

$$(B \cup C) \cap A \neq (A \cup C) \cap B.$$

Zad. 3 Podaj przykład nieskończonego zbioru A takiego, że $\emptyset \in A$ (lub wykaż, że taki nie istnieje).

Zad. 4 Podaj przykład takiego zbioru A , że istnieje $x \in A$ taki, że $x \in \mathcal{P}(A)$.

Zad. 5 Wypisz elementy zbiorów A i B . Czy $A \subseteq B$? Czy $B \subseteq A$? Czy $A = B$? Czy mają elementy wspólne? Czy są rozłączne? Czy $A \in B$ lub $B \in A$?

- a) $A = \{1, \sqrt{4}, \sqrt{4} - 1, \sqrt{9}, \sqrt{9} - 1\}$, $B = \{1, 2, 3\}$,
- b) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$,
- c) $A = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$, $B = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}, \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}\}$,
- d) $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} : x^2 \leq 20\}$,
- e) $A = \emptyset$, $B = \{x \in \mathbb{N} : x^2 + x = 13\}$,

Zakładamy, że a , b i c nie są zbiorami.

Zad. 6 Podaj warunki konieczne i warunki dostateczne zachodzenia poniższych równości:

- a) $\{b, c\} = \{b, c, d\}$,
- b) $\{a, \{a, b\}\} = \{c, \{c, d\}\}$,
- c) $\{\{a, b\}, d\} = \{\{a\}\}$,
- d) $\{\{a, \emptyset\}, b\} = \{\{\emptyset\}\}$.

W punktach a)–c) zakładamy, że a , b , c i d nie są zbiorami.

Zad. 7 Zbiory A , B , C są podzbiorem X . Zaznacz na diagramie Venna zbiory spełniające następujące funkcje zdaniowe. Zdefiniuj te zbiory przy użyciu \cup , \cap , itd.

- a) $x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \notin C$,
- b) $(x \in A \iff x \in B) \iff x \in C$.

Zad. 8 Zaznacz w sposób *losowy* kontur zbioru U na diagramie Venna zbiorów A , B , $C \subseteq X$. Następnie zapisz za pomocą operacji \cup , \cap i \setminus zbiór U . Napisz funkcję zdaniową φ taką, że $\varphi(x) \iff x \in U$ przy pomocy funkcji $x \in A$, $x \in B$, $x \in C$, $x \in X$.

Zad. 9 Udowodnij lub obal poniższe stwierdzenia:

- a) $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$,
- b) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$,
- c) $(C \cup B) \cap A = (A \cap B) \cup (C \setminus B)$.

Spróbuj przeprowadzać dowody na różne sposoby. Napisz tautologie odpowiadające tym prawom rachunku zbiorów.

Zad. 10 Dane są pewne zbiory A, B, C w przestrzeni X . Wiemy, że $A \cap B = A \setminus C$. Czy stąd wynika, że

- a) $A \setminus (B \cup C) = \emptyset$?
- b) $A \cap B \cap C = \emptyset$?
- c) $A \cap C = \emptyset$?

Odpowiedzi uzasadnij!

Zad. 11 Udowodnij

- a) $\mathcal{P}(X) \cap \mathcal{P}(Y) = \mathcal{P}(X \cap Y)$,
- b) $\mathcal{P}(X) \cup \mathcal{P}(Y) \subseteq \mathcal{P}(X \cup Y)$.

Wykaż, że punkcie b) nie zachodzi inkluzja odwrotna.

Zad. 12 Dla każdego z poniższych zbiorów wymyśl taką funkcję zdaniową $p(n)$, że

$$A = \{n \leq 50 : p(n)\}.$$

Ustalamy, że n jest tutaj zmienną o zakresie \mathbb{N} .

Postaraj się, żeby zapisać $p(n)$ w postaci prostych funkcji zdaniowych połączonych spójnikami logicznymi. Nie używaj symbolu " \in " (możesz np. używać symboli „|”, „ \leq ” itp.).

- a) $A = \{9, 18, 27, 36\}$,
- b) $A = \{6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46\}$,
- c) $A = \{10, 11, 12, 13, 14, 15\}$
- d) $A = \{3, 17, 48\}$,
- e) $A = \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 44\}$,

Zad. 13 *Różnicę symetryczną* definiujemy jako $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

- a) Pokaż, że różnica symetryczna jest łączna, tzn. $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$.
- b) Niech $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4\}$, $C = \{1, 5\}$. Znajdź zbiór X , dla którego zachodzi równość

$$(A \triangle X) \triangle B = C.$$