

①

TwierdzenieDuży JEŻ jest
niemetryzowalny.D-d. Przypomnijmy najpierw, co to jest JEŻ.Rozważmy $\bigsqcup_{i \in I} [0, \infty)$ (a więc, innymi słowy,
" $[0, \infty) \times I$, gdzie na I
 X rozważamy topologię dyskretną).Na X wprowadzamy relację równoważności $\sim$
"sklejając" wszystkie instancje punktu 0 w X , tzn.

$$\langle x, i \rangle \sim \langle y, j \rangle \Leftrightarrow (x = y = 0 \vee (x = y \wedge i = j)).$$

$$J (= JE\check{Z}) = X / \sim$$

Pomemy też, że jest duży, jeżeli
 I jest nieskończony.Założymy teraz, że J ma przeliczalną bazę w punkcie
sklejenia (jest to warunek konieczny tego, żeby J był
metryzowalny).Oznaczmy ten punkt przez x_0 . (Czyli $x_0 = f(0, i)$, gdzie $f: X \rightarrow X / \sim$ jest dany wzorem

$$f(x) = [x]_{\sim}.$$

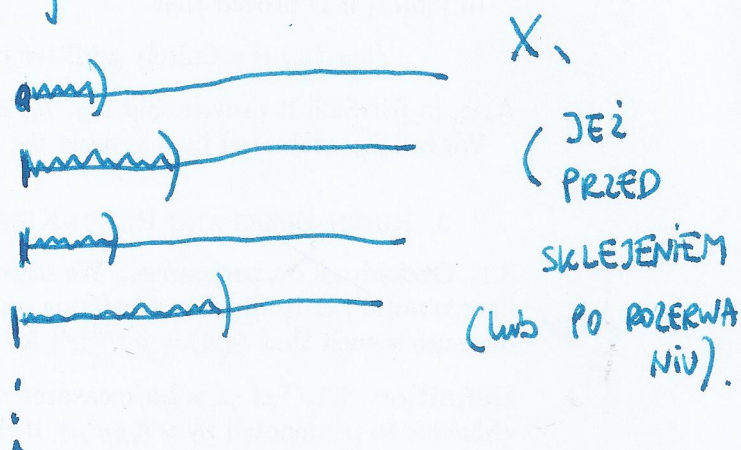
(2)

Oznaczmy tę bazę przez $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

* $\forall n \quad f^{-1}[B_n]$ jest otwarty w X .
(z definicji topologii obrazowej).

* $\forall n \quad f^{-1}[B_n] \ni \langle 0, i \rangle \quad (\text{bo } B_n \text{ są otoczeniami } x_0).$
 $\forall i \in I$

$f^{-1}[B_n]$ wygląda więc jakoś tak:



Skonstruujemy U -otwarty w $X/\sim$ taki, że

$x_0 \in U$ i $\forall n \quad B_n \notin U$.

Taki U będzie świadkiem, że (B_n) nie jest bazą.

Bez zmniejszenia ogólności założymy teraz, że I jest przeliczalny: $I = \{i_0, i_1, i_2, \dots\}$. (Zawsze możemy zignorować pozostałe elementy I).

Ustalmy n

(3)

Ponieważ

$$f^{-1}[B_n] \cap ([0, \infty) \times \{i_n\})$$

jest otwartym otoczeniem $\langle 0, i_n \rangle$,

możemy znaleźć $U_n \subseteq [0, \infty) \times \{i_n\}$,

otwarte otoczenie $\langle 0, i_n \rangle$ takie, że

♥ $U_n \subseteq f^{-1}[B_n] \cap ([0, \infty) \times \{i_n\}).$

Niech $U' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n$ i niech $U = f[U']$.

* Zauważmy, że $f^{-1}[U] = U'$, a więc

U jest otwarty w $X/\sim$.

* Jest też otoczeniem x_0 .

* Ustalmy teraz n .

Gdyby $B_n \subseteq U$, to

$$f^{-1}[B_n] \subseteq f^{-1}[U], \text{ a więc}$$

$$f^{-1}[B_n] \cap ([0, \infty) \times \{i_n\}) \subseteq U_n.$$

Ale to sprzeczność z ♥.



Czyli (B_n) nie
jest bazą

