Lista przedkolokwialna - Topologia 2024

Zad. 1 Czy wnętrze i brzeg podzbioru spójnego muszą być spójne?

Zad. 2 Pokaż, że przestrzeń topologiczna X jest spójna wtedy i tylko wtedy, kiedy nie istnieje ciągła surjekcja $f\colon X \to \{0,1\}$ na przestrzeń $\{0,1\}$ z topologią dyskretną.

Zad. 3 Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi spełniającymi nierówność $f(x) \leq g(x)$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.
Pokaż że zbiór $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon f(x) \leq y \leq g(x)\}$ jest spójny w $\mathbb{R}^2$.

Zad. 4 Niech $\sim_1$, $\sim_2$ i $\sim_3$ będą relacjami równoważności na $[0,1]$ takimi że

- $\sim_1$ "skleja" ze sobą punkty 0 i 1,
- $\sim_2$ "skleja" ze sobą punkty 0 i 1/2,
- $\sim_3$ "skleja" ze sobą punkty 1/3 i 2/3.

Pokaż że przestrzenie $[0,1]_{/\sim_1}$, $[0,1]_{/\sim_2}$ i $[0,1]_{/\sim_3}$ są parami niehomeomorficzne.

Zad. 5 Niech $(X \times Y, \mathcal{T})$ - produkt przestrzeni topologicznych $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$.
Pokaż że dla dowolnych $A \subseteq X$ i $B \subseteq Y$ mamy

a) $\overline{A \times B}^{\mathcal{T}} = \overline{A}^{\mathcal{T}_X} \times \overline{B}^{\mathcal{T}_Y}$,

b) $Int_{\mathcal{T}}(A \times B) = Int_{\mathcal{T}_X}(A) \times Int_{\mathcal{T}_Y}(B)$.

Zad. 6 Pokaż że dla przestrzeni Hausdorffa X przekątna $\Delta = \{(x,x)\colon x \in X\}$ jest domkniętym podzbiorem $X \times X$.

Zad. 7 Pokaż że produkt $X \times Y$ przestrzeni Hasudorffa X i Y jest przestrzenią Hausdorffa.

Zad. 8 Czy podprzestrzenie $X = \mathbb{Q} \times [0,1]$ i $Y = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times [0,1]$ płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ są ze sobą homeomorficzne?

Zad. 9 Podaj przykład funkcji nieciągłej $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, która przekształca zbiory spójne na zbiory spójne.

Zad. 10 Pokaż, że każda niejednopunktowa przestrzeń metryczna spójna jest nieprzeliczalna.

Zad. 11 Niech dane będzie pokrycie przestrzeni spójnej X zbiorami otwartymi $\{U_i\colon i \in I\}$. Pokaż, że dla każdych punktów $x, y \in X$ istnieje ciąg $(i_k)_{k \leq n}$ taki, że $x \in U_{i_0}$, $y \in U_{i_n}$ i dla każdego $k < n$ mamy $U_{i_k} \cap U_{i_{k+1}} \neq \emptyset$. (Wskazówka: zbadaj zbiór tych punktów z X, które dadzą się połączyć z x takim łańcuchem.) Wywnioskuj stąd, że jeśli (X,d) jest przestrzenią metryczną i spójną, to dla dowolnych $x, y \in X$ i dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieją $x_1, \ldots, x_n \in X$ takie, że $x = x_1$, $y = x_n$ i $d(x_k, x_{k+1}) < \varepsilon$ dla każdego $k \leq n$.