Lista 8 - Topologia 2024

Zad. 1 Pokaż, że przestrzeń $C_p[0,1]$ jest podprzestrzenią $\mathbb{R}^{[0,1]}$ z topologią produktową.

Zad. 2 Udowodnij, że produkt dwóch przestrzeni spójnych jest spójny. Wywnioskuj, że skończone produkty przestrzeni spójnych są spójne. (Wskazówka: suma dwóch podprzestrzeni spójnych o niepustym przekroju jest spójna).

Zad. 3 Pokaż, że przestrzeń jest spójna wtedy i tylko wtedy, kiedy nie jest nietrywialnym koproduktem.

Zad. 4 Rozważmy relację równoważności $\sim$ na $\mathbb{R}$ zdefiniowaną przez

$$x \sim y \iff (x = y \vee x, y \in \mathbb{Z}).$$

Pokaż, że $\mathbb{R}_{/\sim}$ (zwany *kwiatkiem*) jest przestrzenią niemetryzowalną. Wskazówka: przeanalizuj dowód niemetryzowalności dużego jeża.

Zad. 5 Rozważmy relację równoważności $\sim$ na $[0,1]^2$. Postaraj się opisać $[0,1]^2_{/\sim}$ w poniższych przypadkach. Które z nich sa homeomorficzne z podprzestrzenią $\mathbb{R}^2$? (Uwaga, w poniższych definicjach uwzględnione zostały tylko nietrywialne warunki, tzn. te, które nie wynikają z definicji relacji równoważności).

a) $\langle x, y\rangle \sim \langle x', y'\rangle$, jeżeli $x = y'$ i $x' = y$,

b) $\langle x, y\rangle \sim \langle x', y'\rangle$, jeżeli $y = y' = 0$,

c) $\langle x, y\rangle \sim \langle x', y'\rangle$, jeżeli $\langle x, y\rangle, \langle x', y'\rangle \notin (0,1)^2$,

d) $\langle x, y\rangle \sim \langle x', y'\rangle$, jeżeli $\langle x, y\rangle, \langle x', y'\rangle \in \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 1,0\rangle\}$,

e) $\langle x, y\rangle \sim \langle x', y'\rangle$, jeżeli $\max(x,y) = \max(x', y')$,

Zad. 6 Pokaż, że każda przestrzeń metryczna jest normalna.

Zad. 7 Pokaż, że każda przestrzeń zwarta (oczywiście Hausdorffa) jest normalna.

Zad. 8 Rozważmy rzut $p\colon X \times Y \to X$ dany wzorem $p(x,y) = x$, przy czym Y jest przestrzenią zwartą. Pokaż, że $p[C]$ jest domknięty w X dla każdego domkniętego $C \subseteq X \times Y$. Pokaż, że to wynikanie nie musi zachodzić, gdy Y nie jest zwarta. Wersja prostsza: zrób to zadanie przy założeniu, że X i Y są metryczne. Wskazówka do wersji trudniejszej: ustal $x \notin p[C]$ i pokaż, że da się go otoczyć zbiorem otwartym rozłącznym z $p[C]$. W tym celu dla każdego $y \in Y$ ustal otoczenie bazowe punktu $\langle x, y\rangle$ rozłączne z C.

Zad. 9 ($\star$) Czy wstęga Möbiusa jest homeomorficzna z $S^1 \times [0,1]$?

Zad. 10 ($\star$) Pokaż, że produkt dowolnie wielu przestrzeni spójnych jest spójny. Wskazówka: rozważmy $X = \prod_{i\in\Lambda} X_i$, przy czym X_i są spójne. Wybierzmy punkt $z \in X$. Pokaż, że dla każdego skończonego $F \subseteq \Lambda$ przestrzeń $Z_F = \{x \in X : x(i) = z(i) \text{ dla } i \notin F\}$ jest homeomorficzna z $\prod_{i\in F} X_i$ (a więc jest spójna). Wywnioskuj, że $Z = \bigcup\{Z_F : F \subseteq \Lambda, F \text{ skończony}\}$ jest spójna. Pokaż, że $\overline{Z} = X$, a więc spójny jest też X.