
Lista 7 - Topologia 2025

Zad. 1 Pokaż, że koprodukt przestrzeni Hausdorffa jest przestrzenią Hausdorffa.

Zad. 2 Pokaż, że jeżeli dla każdego $i \in I$ przestrzeń X_i jest homeomorficzna z X , to koprodukt $\coprod_{i \in I} X_i$ jest homeomorficzny z $X \times I$, przy czym na I rozważamy topologię dyskretną.

Zad. 3 Rozważmy relację równoważności $\sim$ na $\mathbb{R}$ zdefiniowaną przez

$$x \sim y \iff (x = y \vee x, y \in \mathbb{Z}).$$

Pokaż, że $\mathbb{R}/\sim$ (zwany *kwiatkiem*) jest przestrzenią niemetryzowalną. Wskazówka: przeanalizuj dowód niemetryzowalności dużego jeża.

Zad. 4 Rozważmy relację równoważności $\sim$ na $[0, 1]^2$. Postaraj się opisać $[0, 1]^2/\sim$ w poniższych przypadkach. Które z nich są homeomorficzne z podprzestrzenią $\mathbb{R}^2$? (Uwaga, w poniższych definicjach uwzględnione zostały tylko nietrywialne warunki, tzn. te, które nie wynikają z definicji relacji równoważności).

- a) $\langle x, y \rangle \sim \langle x', y' \rangle$, jeżeli $x = y'$ i $x' = y$,
- b) $\langle x, y \rangle \sim \langle x', y' \rangle$, jeżeli $y = y' = 0$,
- c) $\langle x, y \rangle \sim \langle x', y' \rangle$, jeżeli $\langle x, y \rangle, \langle x', y' \rangle \notin (0, 1)^2$,
- d) $\langle x, y \rangle \sim \langle x', y' \rangle$, jeżeli $\langle x, y \rangle, \langle x', y' \rangle \in \{\langle 0, 1 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \langle 1, 0 \rangle\}$,
- e) $\langle x, y \rangle \sim \langle x', y' \rangle$, jeżeli $\max(x, y) = \max(x', y')$,

Zad. 5 (★) Czy wstęga Möbiusa jest homeomorficzna z $S^1 \times [0, 1]$?