
Lista 6 - Topologia 2025

Zad. 1 Niech $h: X \rightarrow Y$ będzie homeomorfizmem i niech $A \subseteq X$. Pokaż, że $h|_A: A \rightarrow h[A]$ jest homeomorfizmem.

Zad. 2 Wywnioskuj z powyższego, że jeśli przestrzenie spójne X i Y są homeomorficzne oraz X zawiera punkt rozspajający na n składowych, to Y również zawiera punkt rozspajający na n składowych.

Zad. 3 Zbadaj, które litery alfabetu są ze sobą homeomorficzne (używaj prostego kroju i zbadaj tylko te bardziej interesujące przypadki, np. parę **A** i **P**).

Zad. 4 Niech $A \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie zbiorem przeliczalnym. Pokaż, że $\mathbb{R}^2 \setminus A$ jest przestrzenią spójną.

Zad. 5 Które z poniższych przestrzeni są spójne? Tym, które nie są spójne, zbadaj składowe.

- a) $\mathbb{Q}$,
- b) strzałka,
- c) kostka Hilberta $[0, 1]^{\mathbb{N}}$,
- d) $\mathbb{R}^2$ z metryką centrum. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ z metryką centrum.
- e) przestrzeń $C_p([0, 1])$,
- f) zbiór funkcji wielomianowych $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ o współczynnikach wymiernych, z metryką supremum,

Zad. 6 Czy X jest homeomorficzne z Y , jeśli

- a) $X = [0, 1]$, $Y = \{(x, y): x^2 + y^2 = 1\}$,
- b) $X = (0, 3) \setminus \{1, 2\}$, $Y = [0, 3] \setminus \{1, 2\}$,
- c) $X = [0, 3) \setminus \{1, 2\}$, $Y = [0, 1] \cup [2, 3) \cup (4, 5)$,
- d) $X = \mathbb{Q}$, $Y = \mathbb{N}$,
- e) $X = [0, 1]^2$, $Y = [0, 1]^2 \setminus (0, 1)^2$.

Zad. 7 Powiemy, że przestrzeń topologiczna jest *lokalnie spójna*, jeśli posiada bazę złożoną ze zbiorów spójnych. Pokaż, że nie każda przestrzeń lokalnie spójna jest spójna. Znajdź przykład przestrzeni spójnej, która nie jest lokalnie spójna.

Zad. 8 Podaj przykład funkcji nieciągłej $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, która przekształca zbiory spójne na zbiory spójne.

Zad. 9 $(\star)$ Dla par z powyższego zadania zbadaj istnienie ciągłych surjekcji $f: X \rightarrow Y$ i $g: Y \rightarrow X$.

Zad. 10 $(\star)$ Pokaż, że każda niejednopunktowa przestrzeń metryczna spójna jest nieprzeliczalna.

Zad. 11 $(\star\star)$ Skonstruuj nieskończoną przestrzeń $A \subseteq \mathbb{R}^2$ taką, że jedynym homeomorfizmem $h: A \rightarrow A$ jest identyczność.