
Lista 5 - Topologia 2025

Zad. 1 Pokaż, że rzut zbioru zwartego $A \subseteq \mathbb{R}^2$ jest zwarty. Czy rzut zbioru domkniętego $A \subseteq \mathbb{R}^2$ musi być domknięty?

Zad. 2 Funkcja $f : (0, 1) \setminus \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \rightarrow Y$, $f(x) = \frac{1}{x} + [\frac{1}{x}]$ jest homeomorfizmem. Znajdź Y .

Zad. 3 Rozważmy przestrzeń metryczną (X, d) i jej podzbiór A . Zdefiniujmy odległość punktu od A w następujący sposób

$$d(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}.$$

Pokaż, że jeśli A jest zwarty, to ta odległość jest realizowana, tzn. istnieje $a \in A$ taki, że $d(x, A) = d(x, a)$.

Zad. 4 Czy $f : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)}{2^n}$ jest ciągła? Czy jest '1-1'? (Znajdź jej obraz.)

Zad. 5 Udowodnij, że kostka Hilberta jest zwarta. Wskazówka: rozważ ciąg (x_n) elementów kostki Hilberta i znajdź taki jego podciąg, żeby ciąg $x_n(1)$ był zbieżny. Kontynuuj i skorzystaj z tego, że topologia kostki Hilberta jest topologią zbieżności punktowej.

Zad. 6 (★) Niech $A \subseteq \mathbb{R}^2$ z metryką centrum. Uzupełnij: A jest zwarty wtedy i tylko wtedy, gdy A jest domknięty, ograniczony i ...

Zad. 7 (★) Udowodnij, że zbiór Cantora zawiera nieprzeliczalnie wiele (!) parami rozłącznych homeomorficznych kopii zbioru Cantora. Czy potrafisz znaleźć inne przestrzenie o tej własności?