
Lista 4 - Topologia 2025

Zad. 1 Pokaż, że zbiór $A \subseteq X$ jest gęsty w przestrzeni metrycznej (X, d) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\varepsilon > 0$ i dla każdego $x \in X$ istnieje $a \in A$ taki, że $d(x, a) < \varepsilon$.

Zad. 2 Pokaż, że podprzestrzeń ośrodkowej przestrzeni metryzowalnej jest ośrodkowa. (Wskażówka. Użyj faktu, że ośrodkowe przestrzenie metryzowalne mają bazę przeliczalną.)

Zad. 3 Udowodnij, że przestrzeń $C[0, 1]$ jest ośrodkowa (korzystając z twierdzenia Weierstrassa mówiącego o tym, że zbiór wielomianów jest gęsty w $C[0, 1]$).

Zad. 4 Powiemy, że przestrzeń (X, d) jest *całkowicie ograniczona*, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje ε -sieć, a więc zbiór skończony F o własności:

$$\forall x \in X \exists y \in F d(x, y) < \varepsilon.$$

Pokaż, że przestrzenie całkowicie ograniczone są ośrodkowe, lecz niekoniecznie na odwrót. Pokaż, że przestrzenie całkowicie ograniczone są ograniczone, ale niekoniecznie na odwrót. (Przestrzeń jest ograniczona, jeżeli istnieje C takie, że $d(x, y) < C$ dla każdych $x, y \in X$).

Pokaż, że przestrzenie zwarte są całkowicie ograniczone, a więc ośrodkowe.

Zad. 5 Niech X, Y będą przestrzeniami metrycznymi i niech funkcja $f: X \rightarrow Y$ będzie ciągła i „na”. Pokaż, że jeśli X jest zwarta, to Y również. (Oczywiście to od razu wynika z ogólniejszego twierdzenia z wykładu. Przeprowadź alternatywny dowód używając ciągłej definicji ciągłości i zwartości.)

Zad. 6 Sprawdź, czy poniższe przestrzenie są zwarte:

- $C[0, 1]$ z metryką supremum,
- przestrzeń z gruszką,
- $\{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ z metryką centrum,
- strzałka,
- $\{f \in C[0, 1] : \forall x \in [0, 1] |f(x)| \leq 1\}$ z metryką supremum.

Zad. 7 Pokaż, że zbiory postaci

$$U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n \times [0, 1] \times [0, 1] \times \dots,$$

przy czym $n \in \mathbb{N}$, a U_i są otwartymi podzbiórmi $[0, 1]$ dla $i \leq n$, stanowią bazę kostki Hilberta (patrz lista przestrzeni metrycznych). Zauważ, że ta teza będzie prawdziwa również, gdy założymy dodatkowo, że U_i są postaci $(a_i, b_i) \cap [0, 1]$ dla $a_i < b_i \in \mathbb{R}$.

Zad. 8 (★) Podaj przykład metryki d na $\mathbb{R}^2$ takiej, że $(\mathbb{R}^2, d)$ jest ośrodkowa, ale $\mathbb{Q}^2$ nie jest w niej zbiorem gęstym.

Zad. 9 (★) Założenie metryzowalności w zadaniu 2 jest konieczne. Płaszczyzna Sorgenfrey'a to $\mathbb{R}^2$ wyposażona w topologię zadaną bazą: $\{[a, b) \times [c, d) : a < b, c < d\}$.

- Pokaż, że płaszczyzna Sorgenfrey'a jest ośrodkowa.
- Znajdź podprzestrzeń $D \subseteq \mathbb{R}^2$ mocy $\mathfrak{c}$ taką, że D jest przestrzenią dyskretną, tzn. jej singletony są otwarte. Wywnioskuj, że D nie jest ośrodkowa.