
Lista przedegzaminacyjna - Topologia 2024

Egzamin odbędzie się w **środe 26 czerwca**. Rozpocznie się o 9:00 w sali HS i potrwa 120 minut.

Zad. 1 (zadanie z literkami) Pewna cywilizacja szczyci się tym, że jej alfabet składa się wyłącznie ze spójnych podprzestrzeni \mathbb{R}^2 , które są parami niehomeomorficzne. Czy to możliwe, żeby alfabet ten składał się z **c** wielu liter?

Zad. 2 (zadanie z literkami II) Z kolei w alfabecie innej cywilizacji występuje kostka Hilberta $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ i $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \times [0, 1]^{\mathbb{N}}$. Czy te litery są ze sobą homeomorficzne?

Zad. 3 Czy istnieje funkcja ciągła i „na” $f: X \rightarrow Y$, jeżeli $X = \mathbb{R}$ (z metryką euklidesową), a Y jest strzałką? Czy istnieje funkcja ciągła „na” $f: Y \rightarrow X$?

Zad. 4 Niech W będzie zbiorem funkcji różniczkowalnych (w każdym punkcie) o dziedzinie $[0, 1]$. Odpowiedz na poniższe pytania uzasadniając odpowiedzi.

- Czy W jest otwarty w $C[0, 1]$?
- Czy W jest domknięty w $C[0, 1]$?
- Czy (W, d_{sup}) jako podprzestrzeń $C[0, 1]$ jest zupełna?
- Czy (W, d_{sup}) jako podprzestrzeń $C[0, 1]$ jest spójna?

Zad. 5 Które z poniższych własności dziedziczą się na wszystkie podprzestrzenie? Które na podprzestrzenie domknięte? Które na ciągle obrazy? Metryzowalność, spójność, zupełność, jednospójność, zwartość, ośrodkowość.

Zad. 6 Pokaż, że płaszczyzny nie da się wysumować z przeliczalnie wielu prostych (wskazówka: użyj pewnego znanego twierdzenia).

Zad. 7 Dla $r > 0$ niech K_r będzie kołem domkniętym (tzn. z brzegiem) na płaszczyźnie o środku $\langle 0, 0 \rangle$ i promieniu r . Rozważmy

$$B = \prod_{n \in \mathbb{N}^+} K_n \text{ oraz } D = \prod_{r \in \mathbb{R}^+} K_r$$

z topologią produktową.

- Zdefiniuj na B metrykę zgodną z topologią B (bez uzasadnienia).
- Pokaż, że dla **każdej** metryki d na B (zgodna z topologią) istnieje k takie, że $d(x, y) < k$ dla każdych $x, y \in B$.
- Pokaż, że D nie jest metryzowalna.