LEMAT URYSOHNA: Załóżmy, że X jest normalna. Niech $F, G \subseteq X$, domknięte, $F \cap G = \emptyset$. Wtedy istnieje funkcja ciągła $f : X \to [0,1]$ taka, że

- $\forall x \in F \quad f(x) = 0$,
- $\forall x \in G \quad f(x) = 1$.

(BTW: mówimy, że taka f rozdziela F i G).

D-d. Tak, jak na wykładzie, zaczynamy od skonstruowania rodziny

$\{V_q : q \in D\}$, gdzie D - liczby ~~wym~~ diadyczne wymierne $\in (0,1)$ tzn. postaci $\frac{k}{2^n}$.

t, że

- $F \subseteq V_q \subseteq G^c \quad \forall q \in D$.
- $\forall q < q' \quad \overline{V_q} \subseteq V_{q'}$.

No i teraz definiujemy:

$$f(x) = \inf\{q : x \in V_q\}$$

Na wykładzie napisałem $\notin$. Z jakichś powodów wydawało mi się to dobrym pomysłem, pomimo, że Antek usiłował mnie przekonać, że nie jest.

lub $f(x) = 1$, jeżeli $\forall q \in D \ x \notin V_q$.

Wtedy $f(x) = 0$, gdy $x \in F$ i $f(x) = 1$, gdy $x \in G$.

Sprawdzamy ciągłość:

Niech $x \in f^{-1}[(a,b)]$. Wtedy $f(x) \in (a,b)$.

- $f(x) < b \Rightarrow \exists q < b \ x \in V_q$
- $a < f(x) \Rightarrow \exists q' > a \ x \notin V_{q'}$. $x \notin V_{q''}$, dla $a < q'' < q'$.

Więc $x \in \underbrace{V_q \setminus \overline{V_{q''}}}_{} \subseteq f^{-1}[a,b]$ otwarty, więc $f^{-1}[a,b]$ - otwarty. ∎