
Kolokwium 1 - Topologia 2025

Zad. 1 (3) Znajdź wnętrze i domknięcie zbioru A w przestrzeni X , jeśli

a) $A = \mathbb{N}$, $X = \mathbb{Z}$ z metryką euklidesową.

b) $A = (0, 1] \cap \mathbb{Q}$, $X = (0, 2) \cap \mathbb{Q}$ z metryką euklidesową.

c) $A = \{f \in C[0, 1] : f \text{ przyjmuje zarówno wartości dodatnie, jak i ujemne}\}$, $X = C[0, 1]$.

d) $A = \{f \in C_p[0, 1] : f(0) = 0\}$, $X = C_p[0, 1]$.

Zad. 2 (2) Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Dla podzbioru $A \subseteq X$ definiujemy $\diamond(A) = \overline{(\text{Int } A)}$ (słownie: *karo* A to *domknięcie wnętrza* A).

a) Pokaż, że dla dowolnego zbioru $A \subseteq X$ mamy $\diamond(\diamond(A)) = \diamond(A)$.

b) W $X = \mathbb{R}$ z topologią euklidesową znajdź domknięty zbiór A dla którego $\diamond(A) \neq A$.

Zad. 3 (2) Ustalmy przestrzeń metryczną X i jej podzbiór zwarty $F \subseteq X$. Niech $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją daną wzorem

$$f(x) = \inf\{d(x, y) : y \in F\}.$$

Pokaż, że dla każdego $x \in X$ istnieje $y \in F$ taki, że $d(x, y) = f(x)$.

Zad. 4 (2) Podaj przykład nieskończonej zwartej podprzestrzeni $C[0, 1]$.

Zad. 5 (3) Prosta z szyszką to zbiór $X = \mathbb{R} \cup \{s\}$ wyposażony w następującą topologię. Jeżeli $U \subseteq \mathbb{R}$, to U jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy jest otwarty w metryce euklidesowej. Jeżeli szyszka (czyli s) należy do U , to U jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy $\mathbb{R} \setminus U$ jest zwarty w metryce euklidesowej.

a) Czy prosta z szyszką jest Hausdorffa?

b) Czy prosta z szyszką jest zwarta?

c) Podaj przykład nietrywialnego ciągu zbieżnego do szyszki.