Kolokwium 1 - Topologia 2024

Zad. 1 (6) Znajdź wnętrze i domknięcie zbioru A w przestrzeni X, jeśli

a) $A = (0,5] \times \big([4,8) \cap \mathbb{Q}\big)$, $X = \mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową,

b) A jest zbiorem funkcji stałych na pewnym przedziale, $X = C[0,1]$ z metryką supremum, (Uwaga. Funkcja $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ jest *stała na pewnym przedziale*, jeśli istnieje $0 \le a < b \le 1$ i $r \in \mathbb{R}$ takie, że $f(x) = r$ dla każdego $a \le x \le b$).

c) A jest zbiorem ciągów, w których występują dokładnie dwie jedynki, $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Zad. 2 Rozważmy przestrzeń $X = \mathbb{Q}$ z metryką euklidesową.

a) Czy istnieje nieskończony podzbiór zwarty X? Odpowiedź uzasadnij.

b) Czy istnieje ograniczony i domknięty podzbiór X, który nie jest zwarty? Odpowiedź uzasadnij.

Zad. 3 Niech X będzie przestrzenią zwartą metryczną i niech $f\colon X \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Wykaż, że funkcja f jest ograniczona i przyjmuje swoje kresy.

Zad. 4 Zdefiniujmy *płaszczyznę grunwaldzką* jako $\mathbb{R}^2$ z topologią wprowadzoną przez następującą bazę:

$$\{\{x\} \times (a, b) \colon x, a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

a) Pokaż, że płaszczyzna grunwaldzka jest Hausdorffa.

b) Czy płaszczyzna grunwaldzka jest ośrodkowa? Odpowiedź uzasadnij.

c) Czy płaszczyzna grunwaldzka jest metryzowalna? Odpowiedź uzasadnij.

d) Opisz zwarte podzbiory płaszczyzny grunwaldzkiej.