Lista 3 - Topologia 2022

Ćw. 1 F-cja $h : (0,1) \setminus \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \to Y$, $h(x) = \frac{1}{x} + \left[\frac{1}{x}\right]$ jest homeomorfizmem. Znajdź Y.

Ćw. 2 Czy $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x(n)}{2^{n+1}}$ jest ciągła? Czy jest '1-1'? (Znajdź jej obraz.)

Zad. 1 Oznaczmy przez C zbiór Cantora. Na potrzeby tego zadania *cząstkami* będziemy nazywać przedziały powstające w toku konstrukcji zbioru Cantora (np. $[0, 1/3]$, $[4/9, 5/9]$, $[4/27, 5/27]$, $\ldots$). Niech $h\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to C$ będzie funkcją zdefiniowaną na wykładzie. Pokaż, że zbiory postaci $A \cap C$, gdzie A jest cząstką, tworzą bazę zbioru Cantora. Wywnioskuj, że funkcja h jest ciągła. Pokaż, że h^{-1} jest ciągła.

Zad. 2 Ustalmy X i topologię $\mathcal{T}$ na X. Pokaż, że $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ jest bazą topologii $\mathcal{T}$ wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $x \in X$ i dla każdego zbioru otwartego $U \ni x$ istnieje $B \in \mathcal{B}$ taki, że $x \in B \subseteq U$.

Zad. 3 Udowodnij, że jeśli X jest przestrzenią metryzowalną ośrodkową, to X ma bazę przeliczalną. (Wskazówka. Przyjmij oznaczenia: niech d oznacza metrykę generującą topologię na X; niech $A = \{a_1, a_2, \ldots\}$ będzie przeliczalnym zbiorem gęstym. Zdefiniuj bazę posługując się kulami...)

Zad. 4 Posługując się stwierdzeniem udowodnionym w powyższym zadaniu pokaż, że strzałka nie jest metryzowalna. (Wskazówka: najtrudniej pokazać, że strzałka nie ma bazy przeliczalnej. Żeby to zobaczyć rozważ otoczenia x postaci $[x, x+1)$ i użyj charakteryzacji bazy z poprzednich zadań).

Zad. 5 Pokaż, że przestrzeń $C[0,1]$ jest ośrodkowa (korzystając z twierdzenia Weierstrassa o aproksymowaniu funkcji ciągłych wielomianami).

Zad. 6 Płaszczyzna Sorgenfreya to $\mathbb{R}^2$ wyposażona w topologię zadaną bazą: $\{[a,b) \times [c,d)\colon a < b, c < d\}$.

- Pokaż, że płaszczyzna Sorgenfreya jest ośrodkowa.
- Znajdź podprzestrzeń $D \subseteq \mathbb{R}^2$ mocy $\mathfrak{c}$ taką, że D jest przestrzenią dyskretną, tzn. jej singletony są otwarte. Wywnioskuj, że D nie jest ośrodkowa.

Zad. 7 Powiemy, że przestrzeń (X,d) jest *całkowicie ograniczona*, jeżeli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje ε-sieć, a więc zbiór skończony F o własności:

$$\forall x \in X \ \exists y \in F \ d(x,y) < \varepsilon.$$

Pokaż, że przestrzenie całkowicie ograniczone są ośrodkowe, lecz niekoniecznie na odwrót.

Zadanie trudniejsze i rekreacyjne.

Zad. 8 Przestrzeń Baire'a definiujemy w następujący sposób. Na zbiorze $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (wszystkich ciągów liczb naturalnych) generujemy topologię zbiorami postaci $B_s = \{x \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \colon \forall i \leq n\ x(i) = s(i)\}$, gdzie s jest ciągiem liczb naturalnych długości n. (Zauważ podobieństwo tych zbiorów do zbiorów bazowych w kostce Cantora.).

- Pokaż, że przestrzen Baire'a jest metryzowalna.
- (*) Pokaż, że przestrzeń Baire'a jest homeomorficzna z $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ z metryką euklidesową.

Zad. 9 Pokaż, że zbiór Cantora C jest homeomorficzny z $C \times C$ (tutaj $C \times C$ traktujemy jako podprzestrzeń $\mathbb{R}^2$ z metryką euklidesową).

Zad. 10 Podaj przykład takiej metryki na $\mathbb{R}^2$, która daje przestrzeń ośrodkową, w której $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ nie jest zbiorem gęstym.