Lista 2 - Topologia 2022

Definicja. Niech $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią topologiczną. Powiemy, że $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ jest bazą tej przestrzeni, jeżeli każdy zbiór otwarty (czyli element $\mathcal{T}$) jest sumą pewnej podrodziny rodziny $\mathcal{B}$. (Np. w przestrzeniach metrycznych rodziny kul stanowią bazy.).

Definicja. Przestrzeń topologiczna X jest *metryzowalna*, jeżeli istnieje metryka d na X, w której rodzina zbiorów otwartych jest topologią X.

Zad. 1 Znajdź podprzestrzeń X przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}$ zawierającą zbiór $A = [0, 1)$ taką, że A jest w X otwarty, ale nie jest domknięty.

Zad. 2 Pokaż, że podprzesteń $X = \{\frac{1}{n} \colon n \in \{1, 2, , \ldots\}\}$ przestrzeni euklidesowej $\mathbb{R}$ jest dyskretna (tzn. każdy podzbiór jest otwarty). A $Y = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \{1, 2, , \ldots\}\}$?

Zad. 3 Niech Y będzie poprzestrzenią przestrzeni X i niech $A \subseteq Y$. Czy:

a) jeśli A jest otwarty w Y, to A otwarty w X?
b) jeśli A jest otwarty w X, to A otwarty w Y?
c) jeśli A jest gęsty w Y i Y jest gęsty w X, to A jest gęsty w X?

Zad. 4 Niech X, Y będą przestrzeniami topologicznymi i niech $\mathcal{B}$ będzie bazą przestrzeni Y. Pokaż, że następujące warunki są równoważne ciągłości funkcji $f \colon X \to Y$:

- $f^{-1}[F]$ jest domknięty dla każdego domkniętego $F \subseteq Y$,
- $f^{-1}[B]$ jest otwarty dla każdego $B \in \mathcal{B}$.

Zad. 5 Pokaż, że okrąg bez punktu jest homeomorficzny z prostą euklidesową. Uogólnij ten wynik na wyższe wymiary.

Zad. 6 Które przekształcenia liniowe są homeomorfizmami? Które są funkcjami ciągłymi?

Zad. 7 Pokaż, że trójkąt jest homeomorficzny z kwadratem.

Zad. 8 Pokaż, że w przestrzeni Hausdorffa punkty są domknięte, a ciągi zbieżne mają tylko jedną granicę.

Zad. 9 Czy podprzestrzeń przestrzeni Hausdorffa jest przestrzenią Hausdorffa?

Zad. 10 Rozważmy przestrzeń $C_p[0, 1]$ funkcji ciągłych z topologią rozważaną na wykładzie (tzn. z bazą składającą się ze wszystkich skończonych przekrojów zbiorów postaci $A_x^I = \{f \in C[0, 1] \colon f(x) \in I\}$, gdzie $x \in [0, 1]$, a $I \subseteq \mathbb{R}$ jest otwarty.

a) Pokaż, że $C_p[0, 1]$ jest przestrzenią Hausdorffa.

b) Pokaż, że (f_n) jest zbieżny do f (w tej przestrzeni) wtedy i tylko wtedy, gdy (f_n) jest zbieżny do f punktowo (tzn. $\lim_n f_n(x) = f(x)$ dla każdego $x \in [0, 1]$).

Zad. 11 Pokaż, że jeżeli X jest przestrzenią metryzowalną, to spełnia następującą własność: dla każdego $x \in X$ istnieje rodzina $\{U_n \colon n \in \omega\}$ otwartych otoczeń x takich, że dla każdego V, otwartego otoczenia x, istnieje n, że $U_n \subseteq V$. (Wskazówka: pomyśl o kulach.) Wywnioskuj, że przestrzeń $C_p([0, 1])$ nie jest metryzowalna.