

---

## Kolokwium 2 - Topologia 2022

---

**Zad. 1** (6) W każdym z poniższych przypadków odpowiedz, bez uzasadnień, na pytania:

a) Czy podprzestrzeń przestrzeni metrycznej ośrodkowej musi być ośrodkowa?

b) Czy przestrzeń spójna musi być jednospójna?

c) Czy produkt nieprzeliczalnie wielu przestrzeni zwartych może być zwarty?

d) Niech  $X$  będzie kostką Hilberta.

- Czy  $X$  jest ośrodkowa?
- Czy  $X$  jest spójna?
- Czy  $X$  ma bazę przeliczalną?
- Czy  $X$  jest zupełna?

e) Czy  $[0, 1]^3$  jest ciągłym obrazem  $[0, 1]$ ?

f) Rozważmy zbiór  $[0, 1] \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$ . Czy  $[0, 1]$  jest ciągłym obrazem  $A$ ?

g) Czy dla każdej przestrzeni metryzowalnej  $X$  i relacji równoważności  $\sim$  na  $X$ , przestrzeń  $X_{/\sim}$  jest metryzowalna?

h) Czy przestrzeń  $C_p[0, 1]$  jest homeomorficzna z  $\mathbb{R}^c$  z topologią produktową?

i) Czy każda przestrzeń zupełna jest zwarta?

**Zad. 2** (6) Podaj przykłady (z krótkimi uzasadnieniami):

- przestrzeni spójnej, zupełnej, która nie jest ośrodkowa.
- przestrzeni spójnej, która nie jest metryzowalna.
- przestrzeni metryzowalnej, która nie jest metryzowalna w sposób zupełny.

**Zad. 3** (3) Udowodnij, że  $\mathbb{R}^2$  jest przestrzenią zupełną.

**Zad. 4** (3) Udowodnij, że  $C[0, 1]$  (z metryką supremum) jest spójna.