Uwagi po KOLOKWIUM 1 7 XI 2008

Zad. 1 To zadania większość zrobiła dobrze. Zadziwiająco dużo osób napisało jednak, że domknięciem zbioru $\{1/n \colon n \in \mathbb{N}\}$ jest $[0, 1]$. Czyżby zbytnią wagę przywiązały do pierwszego kolokwium z WRAiT sprzed roku? :)

Zad. 2

a) Nie wiem, dlaczego tak wiele uważa, że nie ma takiego tworu jak asymptota pionowa. Sporo osób jako przykład podało też tangensa, ale na jakiś dziwnych przedziałach typu $[-\pi/2, \pi/2]$ (zamiast $(-\pi/2, \pi/2)$);

b) Oczywiście odpowiedź "$\mathbb{R}$" była jak najbardziej poprawna;

c) Sporo osób uważało, że wszystkie przestrzenie na świecie są zupełne i nie ma niezbieżnych ciągów Cauchy'ego;

d) Większość osób usiłowała mnie przekonać, że nie ma takiego zbioru. Mniejszość podała poprawne przykłady i tylko jedna osoba zauważyła, że dobrym przykładem jest zbiór z zadania 1a);

e) Parę osób napisało, że $\mathbb{N}$ i $\mathbb{Q}$ są homeomorficzne. To nieprawda: są równoliczne, ale na tym kończą się podobieństwa. $\mathbb{N}$ jest przestrzenią dyskretną, a $\mathbb{Q}$ nie;

f) Wiele osób pisało: *Ponieważ każda przestrzeń zwarta jest zupełna, więc nie istnieje przestrzeń, która jest zupełna i nie jest zwarta.* To zdanie ma siłę równą np. takiemu: *Ponieważ wszyscy studenci na WRAiT są studentami, więc nie istnieje student, który by nie uczęszczał obecnie na nasz wykład.*

Zad. 3 Spodziewałem się, że wiele osób może mieć kłopoty z tym zadaniem (bo trzeba w nim coś udowodnić), ale nie spodziewałem sie, że aż tak wiele. Dowód, o który prosiłem jest bardzo prosty; wystarczyło napisać coś w stylu: *A musi być ograniczony i domknięty. Ponieważ jest ograniczony, więc ma (skończone) kresy. Ponieważ jest domknięty, to kresy są przyjmowane.* Dałem maksimum punktów wielu osobom, które przedstawiły daleko mniej jasne uzasadnienia. Wiele osób pisało też zdania typu *Skoro zbiór jest ograniczony, to ma element największy i najmniejszy*, tak jakby nie istniały zbiory typu $(0, 1)$.
Parę osób zauważyło, że bez założenia niepustości A, fakt, który prosiłem udowodnić, nie jest prawdziwy. Takim osobom dawałem oczywiście 3 punkty, chociaż brak założenia niepustości nie był przeze mnie zamierzony.

Zad. 4 Wielu osobom w poprawnym zrobieniu tego zadania przeszkodziło nadmierne przywiązanie do definicji Heine'go. Oczywiście dało się wykazać ciągłość metryki, korzystając z tej definicji, ale pozostałe definicje były chyba wygodniejsze, zwłaszcza ta z warunkiem na przeciwobrazy. Wystarczyło pokazać, że przeciwobraz przedziału otwartego jest otwarty, co stawało się bardzo proste, gdy zauważyło się, że przeciwobraz ten jest albo kulą albo otwartym "pierścieniem".

Wiele osób usiłowało też udowodnić ciągłość tej funkcji zakładając jej ciągłość (napisy w stylu *jeśli* x_n *dąży do* x, *to* $d(x_n, z)$ *dąży do* $d(x, z)$, *więc* f *jest ciągła; to oczywiście prawda, tyle że właśnie to mieliśmy udowonić!*).
Wiele osób pisało, że jeśli rozważymy metrykę dyskretną to ta funkcja nie będzie ciągła. Rozumiem, skąd ten pomysł, niemniej nie był to pomysł dobry. Metryka dyskretna nie jest funkcją ciągłą w metryce euklidesowej, ale **jest** w metryce dyskretnej.

Zad. 5 Większość osób nie miało problemów z dwoma pierwszymi warunkami przy sprawdzaniu metryki, co oczywiście nie powinno dziwić. Warunek trzeci większości sprawił mniejsze czy większe kłopoty techniczne, co też mnie nie dziwi. Dziwi mnie natomiast, że były osoby, które dochodziły do wniosku, że to nie jest metryka. Przecież w następnym zdaniu zdradzam, że to jest metryka, prosząc o sprawdzenie zwartości!! Pomijam już, że ta metryka pojawiła się na wykładzie...
Z wykazywaniem zwartości prawie wszyscy mieli kłopoty i tak miało być, tzn. w zamierzeniu miało to być najtrudniejsze zadanie. Czy było trudne? Jeśli się pamiętało z wykładu, że ta przestrzeń jest homeomorficzna z Cantorem, a Cantor jest zwarty, to zadanie się stawało bardzo proste (wystarczyło po prostu napisać te dwie uwagi). Niektórzy próbowali dowodzić zwartości z definicji. Paru osobom się udało. Większość jednak próbowała wybrać podciągi zbieżne z elementów przestrzeni $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, a nie z ciągów, co nic wspólnego ze sprawdzaniem zwartości nie miało.
No i conajmniej $1/3$ próbowała korzystać z charakteryzacji zwartości przez domkniętość i ograniczoność. Powtarzam po raz setny: charakteryzacja ta zachodzi tylko w przestrzeniach euklidesowych!!!