Imię, nazwisko

1	2	3	Σ
16	16	16	48

EGZAMIN 1 29 I 2009

Zad. 1 Sprawdź, czy podana funkcja jest metryką na $\mathbb{N}$:

$$d(n, m) = |n - m|.$$

Jakie własności (zwartość, zupełność, ośrodkowość) ma przestrzeń metryczna $(\mathbb{N}, d)$? Czy potrafisz podać przykład funkcji $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, która nie jest ciągła względem tej metryki?

Zad. 2 Podaj przykład nieskończonej rodziny parami rozłącznych podzbiorów gęstych $\mathbb{R}$.

Zad. 3 Niech $A = (\mathbb{Q} \cup [0,1)) \cap (-2, \infty)$. Oblicz domknięcie, wnętrze i brzeg A. Czy A jest zbiorem borelowskim?

Zad. 4 Które z poniższych zdań są prawdziwe?

- jesli $A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ i B jest borelowski, to A jest borelowski;
- w żadnej przestrzeni metrycznej nie istnieje zbiór zwarty **i** gęsty;
- funkcje ciągłe na przedziałach ograniczonych są ograniczone;
- zbiory $(0, \infty)$ i $\mathbb{R}$ z metryką euklidesową są homeomorficzne.

Zad. 5 Podaj przykład nieeuklidesowej przestrzeni Banacha. Podaj w tej przestrzeni przykład szeregu zbieżnego i szeregu, który nie jest zbieżny.

Zad. 6 Podaj przykład nieeuklidesowej przestrzeni unitarnej (tj. takiej, w której istnieje zgodny z normą iloczyn skalarny). Jak wygląda w Twojej przestrzeni twierdzenie Pitagorasa?

Zad. 7 Które z poniższych zdań są prawdzwie?

- w przestrzeni Banacha może istnieć szereg zbieżny, lecz nie bezwzględnie zbieżny;
- istnieje szereg funkcyjny zbieżny niemal jednostajnie, lecz nie jednostajnie;
- istnieje funkcja jednostajnie ciągła, która nie jest Lipschitza.

Zad. 8 Które z poniższych funkcji mogą być przybliżane jednostajnie wielomianami:

- $\sin(x)$ na $\mathbb{R}$;
- $\sin(x)$ na $[0, 8)$;
- x^2 na $\mathbb{R}$?

Zad. 9 Podaj przykład zbioru $A \subseteq [0,1]$, który jest miary dodatniej i nie zawiera żadnego przedziału.

Zad. 10 Niech B będzie zbiorem tych liczb z przedziału $[0,1]$, które nie mają w rozwinięciu dziesiętnym cyfry 2. Oblicz $\lambda(B)$.

Zad. 11 Pokaż, że miara Lebesgue'a zbioru jednopunktowego wynosi 0. Czy jest to własność każdej miary?

Zad. 12 Niech $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie funkcją borelowską. Pokaż, że jeśli $\lambda(\{x\colon f(x) > 0\}) > 0$, to istnieje $n > 0$, takie że $\lambda(\{x\colon f(x) > (1/n)\}) > 0$.