

Zad. 1 Sprawdź, że poniższe funkcje są rozwiązaniami ogólnymi wskazanych równań. Narysuj parę ich rozwiązań szczególnych na jednym układzie współrzędnych (np. dla $C = -2, -1, 0, 1, 2$).

a) $y = Cx^2; xy' = 2y;$

b) $y = C(x - 1)^2; (x - 1)y' = 2y;$

c) $y = C/x; xy' = -y.$

Zad. 2 Sprawdź, że poniższe funkcje są rozwiązaniami ogólnymi wskazanych równań. Znajdź rozwiązania szczególne spełniające dany warunek początkowy.

a) $y = Ce^x - 5x - 5; y' = y + 5x; y(0) = 2;$

b) $y = e^x + Ce^{2x}; y' = 2y - e^x; y(0) = -1;$

c) $y = e^x + Ce^{-x}; y' = 2e^x - y; y(0) = 1;$

d) $y = x + C/x; xy' = 2x - y; y(2) = 3.$

Zad. 3 Które z równań z zadania 1 i 2 są równaniami o rozdzielonych zmiennych? Rozwiąż je i sprawdź, czy wynik zgadza się z powyższymi wynikami. (Nie zgadza się? Pamiętaj, że stałe możemy przemianowywać, jak tylko nam się podoba).

Zad. 4 Znajdź rozwiązania ogólne poniższych równań o zmiennych rozdzielonych. Potem znajdź rozwiązania szczególne spełniające wskazany warunek początkowy.

a) $y' = 1; y(0) = 2;$

b) $y' = y; y(0) = 1;$

c) $y' = \frac{1}{x}; y(1) = -2;$

d) $y' - 3x^2y = 0; y(0) = 15;$

e) $y' = 3\sqrt{x}; y(0) = 7;$

f) $y' = \frac{e^x}{e^y}; y(0) = \ln(2);$

g) $y' + y^2 \cos(x) = \frac{3}{2}xy^2; y(0) = 1;$

h) $\sin(y') = \frac{1}{2}x; y(1) = 1;$

i) $yy' + 5x = \frac{2}{3}; y(1) = 2.$

Zad. 5 Określ jaki procent 100 g radu rozpadnie się po 200 latach, jeżeli wiadomo, że jego czas połowicznego zaniku, tzn. okres po upływie którego rozpada się połowa pozostałej masy pierwiastka, jest równy 1590 lat.

Zad. 6 Po upływie 4 lat ze 100 g substancji radioaktywnej pozostało 20 g. Jaki jest czas połowicznego zaniku tej substancji?

Zad. 7 Epidemia grypy rozprzestrzenia się w społeczności 50 tysięcy osób z prędkością proporcjonalną do iloczynu liczby osób zarażonych i liczby osób niezarażonych. Jeśli na początku na grypę chorowało 100 osób a 10 dni później już 500, to

- ile osób zarazi się w ciągu 20 pierwszych dni?
- kiedy zarażona zostanie połowa społeczności?

Wskazówka. Ułóż samodzielnie równanie różniczkowe opisujące powyższą sytuację. Potem spróbuj je rozwiązać. W razie kłopotów skonsultuj z zadaniem o pantofelkach, które robione było na wykładzie.

Zad. 8 Współczynnik propagacji plotki spełnia prawo Gompertza:

$$\frac{dN}{dt} = Ne^{-0.5t},$$

gdzie $N(t)$ oznacza liczbę osób, które usłyszały plotkę po czasie t . Zinterpretuj to równanie (tzn. omów od czego i jak zależy prędkość rozprzestrzeniania się plotki). Znajdź rozwiązanie ogólne powyższego równania. Znajdź $N(t)$, jeśli plotkę znało na początku 200 osób, a następnie oblicz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t).$$

Co ta wielkość oznacza?

Wskazówka Na wszelki wypadek przypomnę, że $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t/2} = 0$.

Literatura dodatkowa:

- W Internecie można znaleźć wiele appletów do rozwiązywania równań różniczkowych i rysowania ich rozwiązań szczególnych. Niestety, nie znalazłem nic po polsku. Ci, których nie zrazi angielski, mogą zapytać Google'a o "differential equations" & "applet". Oto jedna z wyszukanych w ten sposób stron:

<http://www.jens-langner.de/dessolver/>.

Na mojej stronie postaram się opisać działanie umieszczonego na niej programu.

Pbn

<http://www.math.uni.wroc.pl/~pborod/dydaktyka>