MATEMATYKA II **lista 6** 22 IV 2008

Zad. 1 **(z chemii środowiska)** Elektrownia, położona w samym środku urokliwego miasteczka, emituje pewną szkodliwą substancję do atmosfery. Jeśli pogoda jest bezwietrzna, stężenie tej substancji w punkcie odległym od elektrowni o d kilometrów wynosi (w ppm, tj. $10^{-4}\%$)

$$C = 100 - 15d^2.$$

Załóżmy, że miasteczko ma kształt prostokąta 4 kilometry na 2 kilometry. Jakie jest średnie stężenie substancji w miasteczku?
Wskazówka. Miasteczko wyobrażamy sobie jako prostokąt na płaszczyźnie o środku w $(0,0)$. Wyraź C jako funkcję x i y i policz odpowiednią całkę.

Zad. 2 **(motoryzacyjne)** W idealnych warunkach droga hamowania samochodu (w metrach) wynosi

$$L = 0,0000056xy^2,$$

gdzie x jest masą samochodu w kg, a y jest prędkością samochodu (przed hamowaniem) w km/h. Jaka jest średnia droga hamowania samochodów, których masa waha się w granicach od 1 do $1,5$ tony, a prędkość od 50 do 60 km/h?

Zad. 3 **(z branży finansowej)** Jeśli firma inwestuje x tysięcy godzin roboczych i y milionów złotych w produkcję N tysięcy pewnych jednostek, to N dane jest wzorem

$$N(x,y) = \sqrt[4]{x^3y}.$$

(Jest to wariant tzw. funkcji Cobba-Douglasa). Jaka jest średnia liczba wyprodukowanych jednostek, jeśli $10 \le x \le 20$, a $1 \le y \le 2$?

Zad. 4 **(chemiczne)** Ile mililitrów C_2H_5OH zmieści się w kieliszku, który, postawiony do góry dnem, przyjmuje kształt (nie uwzględniając nóżki) opisywany przez funkcję

$$f(x,y) = 9 - (x^2 + y^2),$$

przy czym jednostka w układzie współrzędnych reprezentuje tutaj 1 cm, natomiast płaszczyzna XY reprezentuje podłoże.
Wskazówka. Trzeba znaleźć obszar, po którym należy całkować funkcję f. Będzie to koło o środku w punkcie $(0,0)$ i promieniu (który należy znaleźć). Potem należy przejść do współrzędnych biegunowych. Przyjmujemy, że 1 litr trunku mieści się w 1000 cm^3.

Zad. 5 Obszar D jest ograniczony przez wykres funkcji $y = 2 - 2x$ oraz proste $x = 0$, $y = 0$. Jaka jest objętość bryły zawartej między tym obszarem a wykresem funkcji $f(x,y) = 2 - 2x - y$?
Wskazówka. Dobrze jest naszkicować powyższy obszar; bryły szkicować nie trzeba, ale warto sprawdzić, czy nad podanym obszarem funkcja jest na pewno dodatnia.

Zad. 6 Co to jest środek masy?

Zad. 7 Wyznacz współrzędne środka masy jednorodnej (tzn. o stałej gęstości) ćwiartki koła o promieniu 1.

Zad. 8 Znajdź środek masy masy zawartej w obszarze D o gęstości powierzchniowej $\rho(x,y) = \frac{y^2}{2-x}$, jeśli $D = \{(x,y)\colon x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 2\}$.

Zad. 9 Znajdź pole powierzchni płaszczyzny będącej wykresem funkcji $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ leżącej nad obszarem $x^2+y^2 \leq 1$.

Zad. 10 Znajdź pole powierzchni płaszczyzny będącej wykresem funkcji $f(x,y) = \sqrt{1-y^2}$ leżącej nad prostokątem $[-5,5] \times [-1,1]$.

Zad. 11 Oblicz poniższą całkę

$$\int_0^2 \int_{-1}^1 \int_0^1 x + 2y - z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z.$$

Wyjaśnij, jaką funkcję całkujemy i po jakiej bryle.

Literatura dodatkowa:

- O środku masy
  `http://www.math.us.edu.pl/~pgladki/faq/node87.html`

Pbn
`http://www.math.uni.wroc.pl/~pborod/dydaktyka`