

**Zad. 1**    Jaką własność obszaru  $D$  opisuje  $\iint_D 1 \, dx \, dy$ ? Uzasadnij odpowiedź.

**Zad. 2**    Oblicz całki po wskazanym prostokącie  $D$ .

a)  $\iint_D 3 \, dx \, dy$ ,    gdzie  $D = [0, 3] \times [0, 3]$ ;

b)  $\iint_D x - y + 2 \, dx \, dy$ ,    gdzie  $D = [-2, 3] \times [2, 3]$ ;

c)  $\iint_D 3x - xy + 3 \, dx \, dy$ ,    gdzie  $D = [0, 2] \times [-1, 1]$ ;

d)  $\iint_D x^2 - xy^2 + 3y^3 \, dx \, dy$ ,    gdzie  $D = [-2, 2] \times [-1, 0]$ ;

e)  $\iint_D \sin(x - 2y) - \cos(y + 3x) \, dx \, dy$ ,    gdzie  $D = [0, \frac{\pi}{3}] \times [-\frac{\pi}{2}, 0]$ ;

f)  $\iint_D e^{x+y} \, dx \, dy$ ,    gdzie  $D = [0, \ln 4] \times [0, \ln 3]$ .

**Zad. 3**    Zamień całkę podwójną  $\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$  na całki iterowane, jeżeli obszar  $D$  jest ograniczony podanymi krzywymi. Zaznacz w układzie współrzędnych obszar  $D$ .

a)  $x = 0, x = 5, y = -1, y = 3$ ;

b)  $x = 0, x = 5, y = -1, y = x$ ;

c)  $x = 0, x = 5, y = \sin(x) - 10, y = \sqrt{x}$ ;

d)  $x = 1/y, y = 1, y = -x^2 + 4, y = 2$ .

**Zad. 4**    Oblicz całkę po obszarze  $D$  ograniczonym wskazanymi krzywymi. Zaznacz w układzie współrzędnych obszar  $D$ .

a)  $\iint_D x^2 - xy \, dx \, dy$ ,     $x = 0, x = 5, y = -1, y = x$ ;

b)  $\iint_D 2x - y + 5 \, dx \, dy$ ,     $x = y, x = -y, x = -3$ ;

c)  $\iint_D 2x - 3y + 2 \, dx \, dy$ ,     $y = 0, y = \pi, x = 0, x = \sin(y)$ ;

d)  $\iint_D xy + 4x^2 \, dx \, dy$ ,     $y = x + 3, y = x^2 + 3x + 3$ .

**Zad. 5**    Oblicz masę rozłożoną na trójkącie ograniczonym krzywymi  $y = x, y = -x, y = 5$ , jeśli gęstość (powierzchniowa) tej masy jest opisywana przez funkcję  $\rho(x, y) = 2x^2 + y$ .

**Zad. 6**    Obliczyć całkowity ładunek elektryczny obszaru  $D$  ograniczonego przez krzywe  $y = -x^2 + 2$  i  $y = -2x$ , jeśli jego gęstość (powierzchniowa) wynosi  $\sigma(x, y) = x$ .

**Zad. 7** Używając współrzędnych biegunowych oblicz całkę podwójną po wskazanym obszarze  $D$ .

a)  $\iint_D x^2 + y^2 \, dx \, dy$ ,  $D = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ ;

b)  $\iint_D e^{\sqrt{x^2+y^2}} \, dx \, dy$ ,  $D = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ ;

c)  $\iint_D 3xy \, dx \, dy$ ,  $D = \{(x, y) : y \geq x, x^2 + y^2 \leq 9\}$ ;

d)  $\iint_D x \, dx \, dy$ , gdzie  $D$  jest wycinkiem koła  $x^2 + y^2 = 4$  ograniczonym krzywymi  $y = x$ ,  $y = \sqrt{3}x$ ,  $x \geq 0$ .

**Zad. 8** ★ W kole o promieniu  $r = 1$  m i środku w  $(0, 0)$  rozłożona jest masa  $m$  o gęstości (powierzchniowej)  $\rho(r, \varphi) = e^{-r} \text{kg/m}^2$ . Z jaką siłą jest ona przyciągana przez masę  $m_0 = 1$  kg oddaloną od punktu  $(0, 0)$  o 10 m?

Literatura dodatkowa:

- Pod poniższym adresem można poćwiczyć zamianę całek podwójnych na całki iterowane.

[http://mathdl.maa.org/images/upload\\_library/3/FlashForum/share\\_area/double\\_integrals.html](http://mathdl.maa.org/images/upload_library/3/FlashForum/share_area/double_integrals.html)

Pbn

<http://www.math.uni.wroc.pl/~pborod/dydaktyka>