

Zad. 1 Niech $\{F_\alpha: \alpha \in A\} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ będzie rodziną niezależną. Pokaż, że dla dowolnej funkcji $f: \alpha \rightarrow \{0, 1\}$ istnieje ultrafiltr $\mathcal{U}$ taki, że

$$F_\alpha \in \mathcal{U} \iff f(\alpha) = 1.$$

Wywnioskuj, że istnieje 2^c ultrafiltrów.

Zad. 2 Załóżmy, że $(L_n)_{n \in \omega}, (R_n)_{n \in \omega}$ spełnia własności

- $L_n \subseteq^* L_m$ i $R_n \subseteq^* R_m$ dla $n < m$,
- $L_n \cap L_m = \emptyset$.

Pokaż, że istnieje taki L , że $L_n \subseteq^* L$ i $R_n \cap L =^* \emptyset$ dla każdego n . Wskazówka: rozważ funkcję $f_m(n) = \max R_m \cap R_n$. Wywnioskuj, że nie istnieje $(\omega, \mathfrak{b})$ -luka.

Zad. 3 Pokaż, że $\mathfrak{p} \leq \mathfrak{b}$.

Powiemy, że $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ jest rodziną *splitującą*, jeżeli dla każdego $A \subseteq \omega$ istnieje $S \in \mathcal{S}$ taki, że zarówno $A \setminus S$ jak i $A \cap S$ są nieskończone. Współczynnik $\mathfrak{s}$ jest najmniejszą mocą rodziny splitującej.

Zad. 4 Udowodnij, że $\mathfrak{s}$ jest najmniejszą liczbą kardynalną κ o własności: istnieje κ ograniczonych ciągów liczb rzeczywistych takich, że dla każdego zbioru nieskończonego $Y \subseteq \omega$ chociaż jeden z naszych ciągów jest rozbieżny na Y (tzn. jego podciąg zadany przez Y jest rozbieżny).

Zad. 5 Pokaż, że jeżeli $\omega \leq \kappa < \mathfrak{p}$, to $2^\kappa = \mathfrak{c}$. Wskazówka: drzewko $2^{<\omega}$ da się zanurzyć w $\mathcal{P}(\omega)/fin$, tzn. można znaleźć rodzinę $\{A_\sigma: \sigma \in 2^{<\omega}\}$ taką, że $A_\tau \subseteq^* A_\sigma$, jeżeli $\sigma \subseteq \tau$ i $A_\tau \cap A_\sigma = \emptyset$, jeżeli σ i τ są nieporównywalne. Zauważ, że pod każdą gałęzią tego zanurzenia można znaleźć pseudo-przekrój i kontynuować konstrukcję.