
Aksjomatyczna teoria mnogości - Lista 1 (2025)

Zad. 1 Pokaż, że aksjomat $\diamond$ pociąga za sobą Hipotezę Continuum.

Zad. 2 Załóżmy, że drzewo T jest konstruowane w podobny sposób, co drzewo Suslina na wykładzie, w szczególności α -ty poziom T składa się z liczb porządkowych $[\omega \times \alpha, \omega \times (\alpha + 1))$. Przez $T|_\alpha$ będziemy rozumieć poddrzewo T składające się ze wszystkich poziomów mniejszych niż α .

- Pokaż, że zbiór $\{\alpha < \omega_1 : T|_\alpha = \alpha\}$ jest clubem.
- Niech $A \subseteq \omega_1$ i $f : \omega_1 \rightarrow A$. Pokaż, że zbiór $\{\alpha < \omega_1 : \text{rng}(f|_\alpha) \subseteq \alpha\}$ jest clubem.
- Załóżmy, że A jest antylańcuchem maksymalnym w T . Wówczas zbiór

$$\{\alpha < \omega_1 : A \cap \alpha \text{ jest antylańcuchem maksymalnym w } T|_\alpha\}$$

jest clubem. (Wskazówka: użyj poprzednich podpunktów).

Zad. 3 Niech T będzie drzewem Suslina. Rozważmy $T \times T = \{\langle s, t \rangle : s \in S, t \in T\}$ z porządkiem zadany przez

$$\langle s, t \rangle \leq \langle s', t' \rangle \iff (s \leq s') \wedge (t \leq t').$$

Upewnij się, że $T \times T$ jest drzewem. Pokaż, że nie jest drzewem Suslina.