Aksjomatyczna teoria mnogości - Lista 1 (2025)

Zad. 1 Upewnij się, że zbiór $A \subseteq \kappa$ jest domknięty (w sensie podanym na wykładzie) wtedy i tylko wtedy, gdy jest domknięty w topologii porządkowej.

Zad. 2 Udowodnij, że jeżeli κ jest regularna i $(C_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ jest rodziną clubów, to

$$\triangle_{\alpha<\kappa} C_\alpha \text{ jest clubem.}$$

Wskazówka: zacznij tak, jak przy dowodzie faktu, że odpowiednie przekroje clubów są clubami.

Zad. 3 Pokaż, że jeżeli $S \subseteq \kappa$ (κ - regularna) jest stacjonarny i $f\colon S \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą (na S rozważamy topologię porządkową, a na $\mathbb{R}$ euklidesową), to f jest stała od pewnego miejsca, tzn. istnieje $\alpha < \kappa$ i $r \in \mathbb{R}$ takie, że $f(\beta) = r$ dla każdego $\beta > \alpha$. Wskazówka: najpierw pokaż, że dla każdego n istnieje α takie, że $|f(\beta) - f(\gamma)| < 1/n$ dla $\beta, \gamma > \alpha$.

Zad. 4 Użyj lematu Fodora, żeby pokazać, że przestrzeń

$$X = \omega_1 \times (\omega_1 + 1)$$

z topologią produktową nie jest normalna. Dokładniej, kładąc $A = \{\langle\alpha, \alpha\rangle\colon \alpha < \omega_1\}$ i $B = \omega_1 \times \{\omega_1\}$, pokaż, że

- A i B są domknięte,
- każdy zbiór otwarty U zawierający A, zawiera także zbiór $(\delta, \omega_1) \times (\delta, \omega_1)$ dla pewnego $\delta < \omega_1$ (tutaj przyda się Fodor, patrz wykład),
- każdy zbiór otwarty zawierający B musi się w takim razie kroić niepusto z U jak wyżej.

Zad. 5 Podaj przykład zbioru stacjonarnego $S \subseteq \omega_1$, który nie jest clubem. (To nie jest natychmiastowe. Dominik obiecał zrobić to zadanie).

Zad. 6 Rozważmy rodzinę

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq \omega_1\colon A \in \text{CLUB lub } \omega_1 \setminus A \in \text{CLUB}\}.$$

- Udowodnij, że $\mathcal{A}$ zawiera rodzinę zbiorów borelowskich na ω_1 (wskazówka: $\mathcal{A}$ jest σ-algebrą).
- Udowodnij, że jeżeli A zawiera club C, to A jest borelowski (wskazówka: $\omega_1 \setminus C$ jest otwarty, a więc jest sumą rodziny $\mathcal{P}$ przeliczalnych przedziałów. Trzeba rozważać zbiory $(A \setminus C) \cap P$, $P \in \mathcal{P}$. W szczególności można pokazać, że selektory tej rodziny są borelowskie, a stąd już tylko krok...).
- Wywnioskuj, że $\mathcal{A}$ jest rodziną zbiorów borelowskich na ω_1. To znaczy, że zbiory stacjonarne nie zawierające cluba to jedyne zbiory nieborelowskie na ω_1.