Analiza i Topologia **Lista 9** 9 I 2018

Zad. 1 Pokaż, że następujące funkcje są borelowskie. (Uwaga: żeby sprawdzić, że dany przeciwobraz jest borelowski, niekoniecznie trzeba go znaleźć).

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, \text{ gdy } x > 0, \\ 0, \text{ gdy } x = 0, \\ -1, \text{ gdy } x < 0. \end{cases}$$

$$g(x) = \operatorname{sgn}(\sin(x))$$

$$h(x) = \begin{cases} 0, \text{ gdy } x \leq 0, \\ \sin(\frac{1}{x}), \text{ gdy } x > 0. \end{cases}$$

$$i(x) = \begin{cases} x^2 - e^x \text{ gdy } x \in \mathbb{Q}, \\ \log(|x|+1)^4 \text{ gdy } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zad. 2 Załóżmy, że (f_n) jest ciągiem funkcji borelowskich takich, że istnieje $r \in \mathbb{R}$ taki, że $f_n(x) < r$ dla każdego n i dla każdego x. Pokaż, że wtedy f zdefiniowane jako

$$f(x) = \sup_n f_n(x)$$

jest funkcją borelowską. (Wskazówka: prześledź dowód faktu, że granica punktowa ciągu funkcji borelowskich jest borelowska.)

Zad. 3 Pokaż, że jeżeli funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest borelowska, a $\lambda(A) = 0$, to

$$\int_A f \, d\lambda = 0.$$

Pokaż to najpierw dla f będącej funkcją prostą, potem dla f - funkcji borelowskiej nieujemnej, a dopiero na końcu w pełnej ogólności.

Zad. 4 Oblicz całkę $\int_{[1,3)} f \, d\lambda$, gdzie $f(x) = \frac{1}{x}$.

Zad. 5 Oblicz całkę $\int_{[1,3)} f \, d\mu$, gdzie $f(x) = \frac{1}{x}$, a μ jest miarą liczącą określoną na $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, tzn. $\mu(A) = |A|$ dla A - skończonego i $\mu(A) = \infty$ dla A nieskończonego.

Zad. 6 Oblicz całkę $\int_{[0,1]} g \, d\lambda$, gdzie

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \text{ dla } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \\ \sin(x^2) \text{ dla } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Zad. 7 Podaj parę przykładów funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, które są równie λ-prawie wszędzie funkcji $g(x) = 2x + 1$.

Zad. 8 Podaj parę przykładów funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, które są równie δ_0-prawie wszędzie funkcji $g(x) = 2x + 1$. (Tutaj δ_0 jest deltą Diraca w punkcie 0). Podaj charakteryzację takich funkcji.