Analiza i Topologia **Lista 8** 19 XII 2017

Zad. 1 Sprawdź, że rodzina złożona z podzbiorów przeliczalnych i podzbiorów ko-przeliczalnych $\mathbb{R}$ tworzy σ-ciało. Zauważ, że jest to σ-ciało generowane przez rodzinę wszystkich podzbiorów skończonych $\mathbb{R}$. (Przypomnienie: zbiór $A \subseteq \mathbb{R}$ jest ko-przeliczalny, jeśli $\mathbb{R} \setminus A$ jest przeliczalny.)

Zad. 2 Sprawdź, że funkcja $\mu\colon \mathcal{A} \to \{0,1\}$ (gdzie $\mathcal{A}$ jest rodziną z zadania 1), dana wzorem

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } A \text{ jest przeliczalny} \\ 1, & \text{gdy } A \text{ jest ko-przeliczalny.} \end{cases}$$

jest miarą.

Zad. 3 Pokaż, że funkcja $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \{0,1\}$ dana wzorem

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } A \text{ jest przeliczalny} \\ 1, & \text{gdy } A \text{ jest nieprzeliczalny.} \end{cases}$$

nie jest miarą.

Zad. 4 Pokaż, że funkcja $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,\infty]$ dana wzorem

$$\mu(A) = \begin{cases} |A|, & \text{gdy } A \text{ jest skończony} \\ \infty, & \text{gdy } A \text{ jest nieskończony.} \end{cases}$$

jest miarą.

Zad. 5 Pokaż, że poniższe rodziny generują rodzinę zbiorów borelowskich (tzn., że najmniejszym σ-ciałem zawierających daną rodzinę jest rodzina zbiorów borelowskich):

a) rodzina podzbiorów otwartych $\mathbb{R}$,

b) rodzina przedziałów otwartych $\mathbb{R}$,

c) rodzina zbiorów postaci (a,∞) dla $a \in \mathbb{R}$,

d) rodzina zbiorów postaci $[-\infty, q]$ dla $q \in \mathbb{R}$.

Wskazówka: najpierw zauważ, że każdy z powyższych zbiorów jest borelowski, a więc σ-ciała generowane przez te rodziny nie są większe od rodziny zbiorów borelowskich. Następnie pokaż, że za pomocą elementów każdej z powyższych rodzin da się zapisać (używając $\bigcup$, $\bigcap$, $\setminus$ i dopełnień) dowolny przedział domknięty.

Zad. 6 Oblicz z definicji $\lambda([0,1] \cup [2,5))$.

Zad. 7 Pokaż, że jeżeli $P \subseteq \mathbb{R}$ jest przeliczalny, to $\lambda(P) = 0$.

Zad. 8 Sprawdź, czy poniższe stwierdzenia są prawdziwe:

a) $\lambda(A) = \lambda(\overline{A})$ dla każdego $A \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$,

b) $\lambda(A) = \lambda(\mathrm{Int}(A))$ dla każdego $A \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$,

c) jeśli $\lambda(A) \leq \lambda(B)$, to $A \subseteq B$ dla każdych A, $B \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$,

d) $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B) - \lambda(A \cap B)$ dla $A, B \in \mathrm{Bor}(\mathbb{R})$.

Zadania mniej obowiązkowe (aczkolwiek nietrudne):

Zad. 9 Niech $A \subseteq (0,1)$ będzie zbiorem tych liczb, w których rozwinięciu dziesiętnym występuje cyfra 7. Oblicz $\lambda(A)$.

Zad. 10 Pokaż, że jeżeli $\mu(X) < \infty$ i (A_n) jest ciągiem zstępującym elementów Σ, to $\mu(\bigcap_n A_n) = \lim_n \mu(A_n)$.

Zad. 11 Podaj przykład zstępującego ciągu (A_n) zbiorów borelowskich takiego, że $\lambda(\bigcap_n A_n) < \lim_n \mu(A_n)$.